Доклады Академии наук СССР
1975. Том 221, № 4

ФИЗИКА

С. Н. СОКОЛОВ

ДВУМЕРНАЯ МОДЕЛЬ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ СИСТЕМЫ N ЧАСТИЦ С ПОТЕНЦИАЛЬНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

(Представлено академиком А. А. Логуновым 30 IX 1974)

Попытки построить релятивистскую одновременную квантовую механику потенциально взаимодействующих частиц предпринимались в течение длительного периода ([1–9]). Однако в случае парных взаимодействий полноценный Пуанкаре-инвариантный (4-мерный) формализм был найден только для систем, содержащих не более трех частиц ([6], [9]). Для N частиц при $N>3$ построены только модели с многочастичными потенциалами, зависящими от N ([6], [8]). Эти модели являются недостаточно общими для построения вторично квантованных обобщений. В настоящей заметке предлагается двумерная (время+одномерное пространство) модель релятивистской квантовой механики, которая допускает любое число частиц и широкий класс потенциалов и является столь же общей, как и двумерная нерелятивистская квантовая механика. Предлагаемая модель является примером реализации приводимых ниже аксиом ([2], [9], [10]) A1-A4 для случая, когда группой движения G является двумерный аналог $\mathscr{P}_2$ группы Пуанкаре $\mathscr{P}$.

A1. Пространство $\mathscr{H}$ состояний ψ системы N частиц является сепарабельным гильбертовым пространством, представимым в форме тензорного произведения $\mathscr{H}=\otimes\mathscr{H}^i=\otimes\mathscr{H}^\sigma$ одночастичных пространств $\mathscr{H}^i$, $i=1,\dots,N$, или пространств $\mathscr{H}^\sigma$ подсистем σ.

A2. Для любой подсистемы σ существует представление G^σ группы движений G унитарными операторами вида

$$u^\sigma(a)=u^{(\sigma)}(a)\bigotimes_{i\notin\sigma}1^{(i)},$$

где $a=a_1,\dots$ — параметры группы G, $u^{(\sigma)}(a)$ действуют в $\mathscr{H}^\sigma$ и $1^{(i)}$ являются тождественными операторами в пространствах $\mathscr{H}^i$. Представление G^σ содержит подгруппу преобразований эволюции u_t^σ.

A3. Система разделима ([2]), т. е. при больших расстояниях во времени или пространстве взаимодействие между любыми (непересекающимися) подсистемами ρ, λ исчезает в смысле сильных пределов

$$(u^\sigma(a)-u^\rho(a)u^\lambda(a))u_t^\rho\Rightarrow0\quad\text{при } t\to\pm\infty;\tag{1}$$
$$(u^\sigma(a)-u^\rho(a)u^\lambda(a))u_x^\rho\Rightarrow0\quad\text{при } |x|\to\infty,\tag{2}$$

где $\sigma=\rho\cup\lambda$ и u_x^ρ — преобразования из G^ρ, реализующие трансляции в пространстве.

A4. Существует матрица операторов рассеяния $S_{\beta\alpha}$ из каналов α в каналы β, инвариантная к преобразованиям движения начальных и конечных состояний: $u(a)_\beta S_{\beta\alpha}(u(a)_\alpha)^{-1}=S_{\beta\alpha}$, где оператор $u(a)_\alpha=\prod_{\sigma\in\alpha}u^\sigma(a)$ в соответствии с кластерной структурой канала α.

Нерелятивистская квантовая механика реализует аксиомы A1-A4 для группы Галилея в качестве группы G. Замена группы Галилея группой

Пуанкаре затруднительна по следующей причине. Согласно одному из коммутационных соотношений $[K_i, P_j]=i\delta_{ij}P_0$ группы $\mathscr{P}$, взаимодействие, если оно содержится в гамильтониане P_0, должно также входить либо в импульсы P, либо в генераторы Лоренц-поворотов K, и эти операторы должны нетривиальным образом удовлетворять асимптотическим соотношениям (1), (2). В работах [1-7] взаимодействие вводилось в P_0, K, а в [8, 9] — в P_0, P. Число линейных комбинаций генераторов P_0, P, K, J, содержащих взаимодействие, может быть уменьшено до трех, если взаимодействие ввести в P_0+P_3, K_1-J_2, K_2+J_1, а операторы P_0-P_3, K_1+J_2, K_2-J_1, P_1, P_2, K_3, J_3 оставить свободными (так называемая фронтовая динамика [11, 12]).

В предлагаемой модели мы обойдем указанную трудность тем, что используем двумерный аналог фронтовой динамики, т. е. перейдем от генераторов P_0, P, K группы $\mathscr{P}_2$, удовлетворяющих коммутационным соотношениям $[P_0, P]=0$, $[K, P_0]=iP$, $[K, P]=iP_0$, к их комбинациям $P_\pm=P_0\pm P$, удовлетворяющим соотношениям

$$[P_+, P_-]=0, \quad [K, P_+]=iP_+, \quad [K, P_-]=-iP_-,$$

и введем взаимодействие только в P_+:

$$P_+=P_+^f+V, \quad P_-=P_-^f, \quad K=K^f,$$

где V — оператор взаимодействия и индексом f отмечены операторы, свободные от взаимодействия.

Для группы $\mathscr{P}_2$ одночастичное гильбертово пространство $\mathscr{H}^i$ удобно реализовать функциями $\psi(p_i)$ со скалярными произведениями

$$(\psi, \psi_1)=\int \psi^*\psi_1\, dp_i\, p_{0i}^{-1},$$

где $p_{0i}=(m_i^2+p_i^2)^{1/2}$ и $m_i>0$ — масса частицы. Тогда для нетождественных частиц элементами пространства $\mathscr{H}=\otimes\mathscr{H}^i$ являются функции $\psi(p_1, \ldots, p_N)$, а скалярное произведение имеет вид

$$(\psi, \psi_1)=\int \psi^*\psi_1\, d\Omega, \quad d\Omega=\prod_{i=1}^{N} dp_i\, p_{0i}^{-1}. \tag{3}$$

В представлении (3)

$$P_0^f=\sum p_{0i}, \quad P^f=\sum p_i, \quad K^f=i\sum p_{0i}\frac{\partial}{\partial p_i}$$

и свободное конечное Лоренц-преобразование имеет вид

$$u(a, \Lambda_\theta)_f\psi=\exp\left[-i(a_+P_+^f+a_-P_-)\right]\psi(\Lambda_\theta p_1, \Lambda_\theta p_2, \ldots),$$

где $a=\{a_+, a_-\}$ и $\Lambda_\theta p=p\,\mathrm{ch}\,\theta+p_0\,\mathrm{sh}\,\theta$.

Запишем V как интегральный оператор: $V\psi=\int v(p, p')\psi(p')d\Omega'$, где ядро $v(p, p')$ — обобщенная функция $2N$ аргументов $p_1, \ldots, p_N, p_1', \ldots, p_N'$. Тогда для эрмитовости оператора P_+ необходима симметрия ядра

$$v(p, p')=v^*(p', p). \tag{4}$$

Коммутативность $[P_+, P_-]=0$ требует наличия δ-функции:

$$v(p, p')=w(p, p')\delta(P_- - P_-'). \tag{5}$$

Из закона преобразования $u(0, \Lambda_\theta)P_\pm=\exp(\pm\theta)P_\pm$ следует $u(0, \Lambda_\theta)V=e^\theta V$ и $\delta(\Lambda_\theta P_- - \Lambda_\theta P_-')=e^\theta\delta(P_- - P_-')$, откуда получаем

$$w(\Lambda_\theta p, \Lambda_\theta p')=w(p, p'). \tag{6}$$

Итак, согласно условиям (4) — (6), определяющая динамику часть $w(p, p')$ ядра $v(p, p')$ является произвольной функцией, инвариантной к Лоренц-поворотам всех аргументов и симметричной к перестановке p и

p'. Отметим, что условия (4) — (6) являются линейными, так что допускаемые ими операторы взаимодействия V образуют линейное пространство (так же как в нерелятивистском случае и в отличие от случая мгновенной динамики ([5])). Это позволяет представить V в виде суммы операторов парных, тройных и других многочастичных взаимодействий: $V=\sum V_{ij}+$ $+\sum V_{ijk}+\ldots+V_{12\ldots N}$. Операторы парного взаимодействия в явной форме имеют вид

$$V_{ij}\psi=\int w_{ij}(p_i,p_j,p_i',p_j')\,\delta(P_{ij-}-P_{ij-}')\,\psi(\ldots,p_i',\ldots,p_j',\ldots)\frac{dp_i'\,dp_j'}{p_{0i}'\,p_{0j}'},$$

где $p_{i-}=p_{0i}-p_i$ и $P_{ij-}=p_{i-}+p_{j-}$.

Гамильтонианом внутреннего движения подсистемы σ является оператор массы покоя

$$M_\sigma=(P_{0\sigma}^2-P_\sigma^2)^{1/2}=(P_{\sigma+}P_{\sigma-})^{1/2}=((M_\sigma^f)^2+VP_{\sigma-})^{1/2},$$

инвариантный к $u^\sigma(a,\Lambda_\theta)$. Такое определение соответствует описанию подсистемы σ как сложной частицы с массой M_σ и переменной движения подсистемы как целого $P_{\sigma-}$. Действительно, пусть σ содержит частицы $i=$ $=1,\ldots,n$. Введем переменные $\nu_i=\varphi_i-\varphi_1$, где $\varphi_i=\ln(m_i/p_{i-})$. Тогда, согласно равенствам

$$d\Omega_\sigma=\prod_{i=1}^n dp_{i-}(-p_{i-})^{-1}=\prod_{i=1}^n d\varphi_i=dP_{\sigma-}(-P_{\sigma-})^{-1}\prod_{i=2}^n d\nu_i$$

пространство $\mathcal{H}^\sigma$ разложимо в тензорное произведение

$$\mathcal{H}^\sigma=h^{\sigma}_{\rm int}\otimes\mathcal{H}^{\sigma}_{\rm ext},\tag{7}$$

где «внутреннее» и «внешнее» гильбертовы пространства $h^{\sigma}_{\rm int}$, $\mathcal{H}^{\sigma}_{\rm ext}$ реализуются соответственно функциями $\xi(\nu_2,\ldots,\nu_n)$ и $\eta(P_{\sigma-})$ со скалярными произведениями

$$(\xi,\xi_1)=\int\xi^*\xi_1\prod_{i=2}^n d\nu_i,\qquad(\eta,\eta_1)=\int_0^\infty\eta^*\eta_1\,dP_{\sigma-}P_{\sigma-}^{-1}.$$

Соответственно разложим и оператор массы: $M_\sigma^{(\sigma)}=\mu_\sigma\otimes 1_{\rm ext}^{(\sigma)}$. В случае двух частиц оператор квадрата массы в $h^{ij}_{\rm int}$ имеет вид

$$\mu_{ij}^2\xi(\nu)=(m_i^2+m_j^2+2m_im_j\,{\rm ch}\,\nu)\,\xi(\nu)+\int w_{ij}(\nu,\nu')\,\xi(\nu')\,d\nu'.$$

Связанные состояния подсистемы σ описываются нормируемыми собственными функциями $\xi_{m_\sigma^2}\in h^{\sigma}_{\rm int}$ оператора μ_σ^2, а массы (энергии) покоя — собственными числами m_σ. Допустимые взаимодействия V ограничены условием, чтобы спектр $\{m_\sigma^2\}$ операторов μ_σ^2 был неотрицательным.

Для выполнения условий разделимости (макропричинности) (1), (2) достаточно, чтобы ядра $w_{ij\ldots}(\nu_j,\ldots,\nu_j',\ldots)$ были квадратично интегрируемы по переменным ν, ν'.

Выполнение аксиомы А4 мы рассмотрим на примере простой системы рассеяния ([13]), в которой $V=V_{ij}$, т. е. только две частицы i, j взаимодействуют между собой. Волновые операторы Мёллера определяются как сильные пределы

$$W_\pm(P_0,P_0^f)=\underset{t\to\pm\infty}{s\text{-}\lim}\exp(itP_0)\exp(-itP_0^f).$$

Воспользуемся принципом инвариантности Бирмана — Като ([14, 15]):

$$W_\pm(f(A),f(B))=W_\pm(A,B),\tag{8}$$

где A, B — самосопряженные операторы и $f(\lambda)$ — любая непрерывно дифференцируемая численнозначная функция с $f_\lambda'>0$ или операторнозначная функция на другом пространстве такая, что f_λ' — положительный оператор. Так как

$$P_0={}^1/_2(M_{ij}^2P_{ij-}^{-1}+P_{ij-})+\sum_{k\neq i,j}p_{0k},$$

операторы M_{ij}^2, P_{ij-} и p_{0k} нетривиальны на различных пространствах h_{int}^{ij}, $\mathscr{H}_{\text{ext}}^{ij}$ и $\mathscr{H}^k$ и спектр оператора P_{ij}^{-1} положителен, то

$$W_\pm(P_0,P_0^f)=W_\pm(M_{ij}^2,(M_{ij}^f)^2)=W_\pm(\mu_{ij}^2,(\mu_{ij}^f)^2)\otimes 1_{\text{ext}}^{(ij)}\underset{k\neq i,j}{\otimes}1^{(k)}. \qquad (9)$$

Согласно работам ([14], [15]) для существования и полноты операторов $W_\pm$ и, следовательно, унитарности оператора рассеяния $S=W_+^*W_-$ достаточно, чтобы действующий в h_{int}^{ij} оператор $\omega=\mu_{ij}^2-(\mu_{ij}^f)^2$ или некоторый оператор $\omega'=f(\mu_{ij}^2)-f((\mu_{ij}^f)^2)$, где f — любая функция, допустимая в (8), был ядерным ($\operatorname{tr}\omega<\infty$). Если $W_\pm$ существуют, то они обладают переплетающим свойством $P_+W_\pm=W_\pm P_+^f$, из которого и из разложений $u^{(ij)}(0,\Lambda_\theta)=1_{\text{int}}^{(ij)}\otimes u_{\text{ext}}^{(ij)}(0,\Lambda_\theta)$ и (9) следует, что оператор S релятивистски инвариантен: $S=u(a,\Lambda_\theta)_fS(u(a,\Lambda_\theta)_f)^{-1}$.

Формализм многоканальной теории рассеяния для данной модели опирается на разложение (7), а в остальном полностью подобен обычному нерелятивистскому формализму.

Итак, рассмотренная модель удовлетворяет аксиомам A1-A4. Ее существование опровергает все качественные (не зависящие от размерности пространства) физические соображения, выдвигавшиеся против введения прямого потенциального взаимодействия в релятивистской квантовой теории. Модель пригодна для различных вторично-квантованных обобщений с потенциальным и полевым взаимодействием. Математическая проблема построения аналогичной четырехмерной теории остается открытой.

Автор признателен А. С. Шварцу и Ю. М. Широкову за ценные обсуждения.

Институт физики высоких энергий
Протвино Московской обл.

Поступило
31 VIII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *B. Bakamjian, L. H. Thomas,* Phys. Rev., v. 92, 1300 (1953). [2] *L. L. Foldy,* Phys. Rev., v. 122, 275 (1961). [3] *T. F. Jordan, A. J. Macfarlane, E. C. G. Sudarshan,* Phys. Rev., v. 133B, 487 (1964). [4] *L. B. Rédei,* J. Math. Phys., v. 6, 487 (1965). [5] *R. Fong, J. Sucher,* J. Math. Phys., v. 5, 456 (1964). [6] *F. Coester,* Helv. phys. acta, v. 38, 7 (1965). [7] *H. Osborn,* Phys. Rev., v. 176, 1514 (1968). [8] *С. Н. Соколов,* Журн. теоретич. и матем. физ., т. 18, № 1, 56 (1974). [9] *С. Н. Соколов,* Препринт ИФВЭ 73-34, Серпухов, 1973. [10] *Дж Макки,* Лекции по математическим основам квантовой механики, М., 1965. [11] *P. A. M. Dirac,* Rev. Mod. Phys., v. 21, 392 (1949). [12] *L. C. Biedenharn, M. Y. Han, H. van Dam,* Phys. Rev., v. D8, 1735 (1973). [13] *J. M. Jauch,* Hedv. phys. acta, v. 31, 127 (1958). [14] *М. Ш. Бирман,* Изв. АН СССР, сер. матем., т. 27, 883 (1963). [15] *Т. Като,* Теория возмущений линейных операторов, М., 1972.