

Н. А. ШИРОКОВ

**О КОНСТРУКТИВНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ
НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ В ОБЛАСТЯХ, БЛИЗКИХ
К ВЫПУКЛЫМ**

(Представлено академиком С. М. Никольским 23 IX 1974)

Пусть G — односвязная область комплексной плоскости, функция f аналитична в G и непрерывна в \bar{G} . Тогда, как известно, при некоторых ограничениях на область G (см. (1-3)) функция f удовлетворяет условию Липшица с показателем α , $0 < \alpha < 1$, тогда и только тогда, когда найдется последовательность полиномов $p_n(z)$ степени $\leq n$ таких, что

$$|f(z) - p_n(z)| \leq c \rho_{1+1/n}^\alpha(z), \quad z \in \partial G,$$

где $\rho_{1+1/n}(z)$ — расстояние от z до $\Gamma_{1+1/n}$ (см. ниже).

Оказывается, существует другое конструктивное описание аналитических функций с липшицевыми (и более общими) модулями непрерывности: функция f удовлетворяет условию Липшица с показателем α , $0 < \alpha < 1$, тогда и только тогда, когда существует последовательность полиномов $p_n(z)$ степени $\leq n$ и функций v_n , аналитических в \bar{CG} и непрерывных в \bar{CG} таких, что

$$|f(z) - p_n(z) - v_n(z)| \leq c \rho_{1+1/n}^\alpha(z), \quad z \in \partial G. \quad (*)$$

Доказательство соотношения (*) сводится к нахождению соответствующих сопряженных пространств и установлению их изоморфности.

1. Обозначения и формулировки. Обозначения: G — односвязная область комплексной плоскости, $0 \in G$, $\Gamma = \partial G$, функция $t = \varphi(z)$ отображает CG на внешность круга $\{|t| > 1\}$ так, что $\varphi(\infty) = \infty$, функция $z = \psi(t)$ — обратная к ней;

$$\Gamma_R = \psi(\{|t| = R\}), \quad R > 1, \quad \rho(z) = \text{dist}(z, \Gamma), \quad \rho_R(z) = \text{dist}(z, \Gamma_R);$$

$AC(B)$ — множество функций, аналитических на \mathring{B} и непрерывных на \bar{B} ; $\omega(x)$ — положительная неубывающая непрерывная на $[0, \infty)$ функция, удовлетворяющая условиям $\omega(0) = 0$, $\omega(1) = 1$ и $\omega(cx) \leq c_1 c \omega(x)$, $x > 0$, где $c \geq 1$ — любое положительное число, а c_1 — постоянная, не зависящая от c и x , $\omega(f, x)$ — модуль непрерывности функции f ; $\lambda_\omega \subset AC(G)$ и $\Lambda_\omega \subset AC(G)$ — пространства функций f , для которых соответственно

$$\omega(f, x) = o(\omega(x)), \quad \omega(f, x) = O(\omega(x))$$

при $x \rightarrow 0$ с нормой

$$\|f\| = \sup_{x > 0} \frac{\omega(f, x)}{\omega(x)} + |f(0)|;$$

$\pi_\omega \subset AC(G)$ и $\Pi_\omega \subset AC(G)$ — пространства функций f , для которых существует последовательность полиномов $p_n(f, \cdot)$ степени $\leq n$ и функций $v_n(f, \cdot) \in AC(CG)$ таких, что соответственно

$$|f(z) - p_n(f, z) - v_n(f, z)| = o(\omega(\rho_{1+1/n}(z))), \\ |f(z) - p_n(z) - v_n(z)| = O(\omega(\rho_{1+1/n}(z)))$$

при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $z \in \Gamma$ с нормой

$$\|f\| = \sup_n \inf_{p_n, v_n} \sup_{z \in \Gamma} \frac{|f(z) - p_n(z) - v_n(z)|}{\omega(\rho_{1+1/n}(z))} + |f(0)|.$$

Ограничения: А) Функция $\omega(x)$ такова, что

$$\int_0^x \frac{\omega(t)}{t} dt + x \int_x^\infty \frac{\omega(t)}{t^2} dt \leq c\omega(x), \quad x > 0.$$

В) Γ — кривая с ограниченным граничным вращением ⁽⁶⁾. Тогда, как известно ⁽⁶⁾, имеет место формула

$$\psi'(t) = \exp \left[\int_{-\pi}^{\pi} \log \left(1 - \frac{e^{-i\theta}}{t} \right) d\mu(\theta) \right], \quad |t| > 1, \quad (1)$$

где $\mu = \mu^+ - \mu^-$ — конечная вещественная мера, удовлетворяющая условию

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta} d\mu(\theta) = 0, \quad \mu(-\pi, \pi] = 2. \quad (2)$$

При этом, если G выпукла, то мера μ положительна, и наоборот, всякой положительной мере μ , удовлетворяющей условию (2), соответствует по формуле (1) некоторая однолиственная функция ψ , отображающая $\{|t| > 1\}$ на дополнение выпуклой области. Однолиственность функции ψ сохраняется, если $\mu^-(\pi, -\pi] \leq \pi$.

С) В обозначениях п.В) предполагается, что

$$d\mu^-(\theta) = k(\theta) d\theta, \quad k(\theta) \leq K.$$

Теорема. При ограничениях А), В) и С) пространство Λ_ω изоморфно пространству Π_ω .

Замечание 1. Ограничение на функцию $\omega(x)$ обычно для обратных теорем. Ограничения на область по духу близки к ограничениям работы ⁽³⁾, но допускают также случай выпуклой области, как в теореме 4 из ⁽⁴⁾. Заключение теоремы в «прямой» части слабее, а в «обратной» сильнее соответствующих результатов из ⁽¹⁻³⁾.

2. Путь доказательства. Схема доказательства следующая:

- 1) описывается λ_ω^* — пространство, сопряженное к λ_ω ;
- 2) описывается π_ω^* ;
- 3) доказывается, что $\lambda_\omega^* \cong \pi_\omega^*$;
- 4) устанавливается, что $\Lambda_\omega \cong \lambda_\omega^{**}$;
- 5) устанавливается, что $\Pi_\omega \cong \pi_\omega^{**}$.

В результате из 3) — 5) следует, что $\Lambda_\omega \cong \Pi_\omega$.

При доказательстве 1) вводятся функции

$$f_R(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \sum_{k=0}^p \frac{(\xi_R - \xi)^k}{(\xi_R - z)^{k+1}} f(\xi) d\xi,$$

где $R > 1$, p — достаточно большое фиксированное число, а $\xi_R = \xi_R(\xi) = \psi(R\varphi(\xi))$.

Имеет место

Утверждение 1. Для всякой функции $f \in \lambda_\omega$ при ограничениях А), В) и С)

$$|f(z) - f_R(z)| = o(\omega(\rho_R(z)))$$

при $R \rightarrow 1$ равномерно по $z \in \Gamma$.

Применяя некоторые соображения Е. М. Дынькина ⁽⁷⁾, получаем
 Утверждение 2. Для того чтобы $f \in \lambda_\omega$, необходимо и достаточно, чтобы существовала финитная непрерывная в CG функция $M(\xi)$,

$$M(\xi) = o\left(\frac{\omega(\rho(\xi))}{\rho(\xi)}\right),$$

и такая, что

$$f(z) = \int_{CG} \frac{M(\xi)}{\xi - z} d\sigma_\xi, \quad z \in G.$$

Из утверждения 2 следует

Утверждение 3. Имеет место изоморфизм $\lambda_\omega^* \cong L_\omega(CG)$, где $L_\omega(CG)$ — пространство функций F , аналитичных в CG с нормой

$$\|F\|_{L_\omega(CG)} = \iint_{K \cap CG} \frac{\omega(\rho(\xi))}{\rho(\xi)} |F(\xi)| d\sigma_\xi,$$

где K — некоторый фиксированный открытый круг, содержащий \bar{G} .

Второй этап доказательства завершается описанием λ_ω^* .

Утверждение 4. Имеется изоморфизм $\lambda_\omega^* \cong S_\omega(CG)$, где $S_\omega(CG)$ — пространство функций F , аналитичных в CG с нормой

$$\|F\|_{S_\omega(CG)} = \sum_{n=0}^{\infty} \inf_{H_n \Gamma} \int \omega(\rho_{1+2^{-n}}(z)) |Q_n(z) + H_n(z)| dz,$$

где полиномы

$$Q_n(z) = \sum_{h=0}^{2^n} \frac{a_h}{z^{h+1}},$$

если функция

$$F(z) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{a_h}{z^{h+1}}$$

вблизи точки $z = \infty$, а инфимум берется по всем функциям $H_n \in E^1(CG)$, удовлетворяющим условиям

$$\int_{\Gamma} z^k H_n(z) dz = 0, \quad k = 0, 1, \dots, 2^n.$$

Наибольшие аналитические трудности заключаются в третьем этапе, именно в следующем.

Утверждение 5. Имеет место изоморфизм $L_\omega(CG) \cong S_\omega(CG)$.

Четвертый и пятый шаги производятся довольно стандартным образом с использованием уже доказанных фактов.

Замечание 2. На всех шагах доказательства используются лишь следующие геометрические и аналитические свойства линий уровня Γ_R , которые получаются из ограничений В) и С):

- 1) в любой круг радиуса δ попадает часть Γ длины $\leq c\delta$;
- 2) если $z = \psi(t)$, $t_0 = t/|t|$, $R = |t|$, $z_0 = \psi(t_0)$, то

$$\rho(z) \asymp \rho_R(z_0) \asymp (R-1) |\psi'(t)|;$$

3) существует $\alpha < 1$ такое, что при любых $z_1, z_2 \in \Gamma$, $|z_1 - z_2| > \rho_R(z_1)$, $R > 1$, выполняется

$$\frac{\rho_R(z_2)}{\rho_R(z_1)} \leq c \left(\frac{|z_2 - z_1|}{\rho_R(z_1)} \right)^\alpha$$

Теорема остается в силе и при замене условий, более наглядных, В) и С), условиями (1), (2) и (3).

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
17 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. И. Белый, В. М. Миклюков, ДАН, т. 214, № 3, 492 (1974). ² В. К. Дзядык, Укр. матем. журн., т. 24, № 1, 3 (1972). ³ Н. А. Лебедев, Н. А. Широков, Изв. АН АрмССР, матем., т. 6, № 4, 311 (1971). ⁴ Н. А. Лебедев, П. М. Тамразов, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 34, № 6, 1340 (1970). ⁵ П. М. Тамразов, Там же, т. 37, № 1, 148 (1973). ⁶ J. Noonan, Proc. Am. Math. Soc., v. 29, № 2, 307 (1971). ⁷ Е. М. Дынькин, ДАН, т. 208, № 1, 25 (1973).