

УДК 517.945

МАТЕМАТИКА

П. Е. БЕРХИН

САМОСОПРЯЖЕННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИСТЕМЫ

$$*du + \lambda u = f$$

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 4 XI 1974)

Краевые задачи для дифференциальных систем первого порядка на многообразиях изучались разными авторами ⁽¹⁻³⁾. В работе ставится и исследуется самосопряженная краевая задача для неэллиптической системы ($\lambda \neq 0$).

$$*du + \lambda u = f. \quad (1)$$

Пусть Ω — компактное $(2n+1)$ -мерное ориентированное риманово многообразие с краем $\Gamma = \partial\Omega$ такое, что $H^n(\Gamma, R) = 0$. $\Lambda^k(\Omega)$ — гладкие в Ω дифференциальные формы степени k , $\Lambda_0^k(\Omega)$ — подпространство форм с компактными носителями в $\Omega \setminus \Gamma$. Определения операторов d и $*$ даны, например, в ⁽⁴⁾. Через $u|_{\Gamma} = i^*u$ обозначим образ формы u при кокасательном отображении i^* , соответствующем вложению $i: \Gamma \subset \Omega$, а через H — пополнение $\Lambda^n(\Omega)$ по риманову скалярному произведению.

Наряду с системой (1) рассмотрим краевое условие

$$du|_{\Gamma} = 0. \quad (2)$$

Лемма. На формах из $\Lambda^n(\Omega)$, удовлетворяющих условию (2), оператор $*d$ симметричен при нечетных n и кососимметричен при четных n .

Доказательство. Пусть $u, v \in \Lambda^n(\Omega)$ и $du|_{\Gamma} = 0$, $dv|_{\Gamma} = 0$. Так как $H^n(\Gamma, R) = 0$, то найдутся формы Ψ_1, Ψ_2 из $\Lambda^{n-1}(\Omega)$ такие, что $d\Psi_1 = u|_{\Gamma}$, $d\Psi_2 = v|_{\Gamma}$, откуда

$$(*du, v) = \int_{\Omega} du \wedge \bar{v} = \int_{\Gamma} d\Psi_1 \wedge d\bar{\Psi}_2 + (-1)^{n+1} \int_{\Omega} u \wedge d\bar{v} = (-1)^{n+1} (u, *dv).$$

Под оператором K задачи (1), (2) будем понимать замыкание в H оператора $*d$, определенного на гладких удовлетворяющих условию (2) формах. Пространство H обычным образом ⁽⁵⁾ разлагается в ортогональную сумму подпространств G и J , являющихся замыканиями в H образов операторов $d: \Lambda^{n-1}(\Omega) \rightarrow \Lambda^n(\Omega)$ и $*d: \Lambda_0^n(\Omega) \rightarrow \Lambda_0^n(\Omega)$ соответственно. При этом можно показать, что если $u = g + j$ — разложение гладкой формы u , то $g = d\varphi$, $j = *dv$, где φ и v — также гладкие формы и $v|_{\Gamma} = 0$.

Теорема 1. Справедливы следующие утверждения:

- (I) G лежит в области определения $\mathcal{D}(K)$ оператора K и $K|_G = 0$;
- (II) подпространство G и J приводят оператор K ;
- (III) K взаимно однозначен из J на J и $K^{-1}: J \rightarrow J$ вполне непрерывен;
- (IV) $i^{n+1}K$ самосопряжен.

Доказательство. Для доказательства (I) заметим, что G есть замыкание в H форм вида $g = d\varphi$, $\varphi \in \Lambda^{n-1}(\Omega)$. Поэтому $dg|_{\Gamma} = 0$, и $*dg = 0$. Пункт (II) следует из (I), леммы и определения K .

Пусть $u \in \Lambda_0^n(\Omega)$. Тогда $u = g + j$, где $g, j \in \Lambda^n(\Omega) \cap \mathcal{D}(K)$ и $*du = Ku = Kj$. Так как J есть замыкание в H форм $*du$ при $u \in \Lambda_0^n(\Omega)$, то показана плотность образа $K|_J$ в J .

В соболевском пространстве форм $W_2^1(\Omega)$ установим для $u \in J \cap \mathcal{D}(K)$ оценку ($W_2^0(\Omega) = H$)

$$\|u\|_1 \leq c \|Ku\|_0. \quad (3)$$

Предположим, что u — гладкая форма, $\{\beta^\alpha(x)\}$ — некоторое разбиение единицы в Ω , $u^\alpha = \beta^\alpha u$, а $\{x_\alpha^j\}$ — локальные координаты в окрестности Ω^α носителя функции $\beta^\alpha(x)$ такие, что, если $\Gamma \cap \Omega^\alpha \neq \emptyset$, то x_α^1 совпадает с нормальными к $\Gamma \cap \Omega^\alpha = \{x_\alpha^1 = 0\}$. Тогда, поскольку $u = *dv$, где $dv|_\Gamma = 0$ вместе с $v|_\Gamma$, то $u_\xi = 0$ при $1 \leq \xi = (i_1, \dots, i_n)$ — мультииндексу компоненты u_ξ^α формы u , и из результатов ⁽¹⁾ следует оценка

$$\begin{aligned} & (Ku^\alpha, Ku^\alpha) + (d * u^\alpha, d * u^\alpha) \geq \\ & \geq \sum_{i, \xi} \|D_i u_\xi^\alpha\|_0^2 - O(\text{diam supp } \beta^\alpha) \|u^\alpha\|_1^2 - \text{const} \|u^\alpha\|_0^2. \end{aligned}$$

В этой формуле $1 \leq i \leq 2n+1$, а ξ пробегает всевозможные мультииндексы длины n . В силу соотношения

$$\sum_\alpha d * u^\alpha = 0,$$

складывая полученные неравенства при достаточно малых размерах носителей функций $\beta^\alpha(x)$, имеем

$$\|u\|_1 \leq c_1 \|Ku\|_0 + c_2 \|u\|_0. \quad (4)$$

Оценка (4) замыканием распространяется на все $J \cap \mathcal{D}(K)$, в частности $J \cap \mathcal{D}(K) \subset W_2^1(\Omega)$. Так как вложение $W_2^1(\Omega)$ в H компактно, то из (4) следует замкнутость образа оператора $K|_J$ в J . В силу установленной плотности, образ совпадает со всем J . Поэтому $K|_J$ взаимно однозначен и c_2 в (4) может быть по теореме Банаха выбрана равной нулю, что доказывает утверждение (III). Пункт (IV) теперь очевиден.

Из доказанной теоремы и более общей, чем (3), оценки

$$\|u\|_{k+1} \leq c_k \|Ku\|_k$$

для форм из $W_{2n}^{k+1}(\Omega) \cap J \cap \mathcal{D}(K)$, доказательство которой будет опущено, вытекает

Теорема 2. Пусть $\lambda \neq 0$. При $-\lambda \notin \{\lambda_p\}$ — множеству собственных чисел оператора K в J задача (1), (2) однозначно разрешима в H . В противном случае задача фредгольмова. При этом $|\lambda_p| \rightarrow \infty$ при больших p , и если правая часть f есть гладкая форма, то $u \in \Lambda^n(\Omega)$, и условие (2) выполнено в классическом смысле.

Очевидно, что после домножения оператора $K + \lambda$ на i^{n+1} задача (1), (2) становится самосопряженной.

Заметим, что в случае произвольного края Γ указанная задача нетерова, всегда разрешима при $-\lambda \notin \{\lambda_p\}$ и ее индекс совпадает с размерностью $H^n(\Gamma, R)$, что связано с наличием на Γ гармонических форм.

При $n=1$ система (1) сводится к системе

$$\text{rot } u + \lambda u = f,$$

а условие (2) в локальных координатах выпрямленной границы имеет вид

$$D_2 u_3 - D_3 u_2 = 0.$$

Если Ω гомеоморфна шару, то данная задача самосопряжена и однозначно разрешима, кроме счетного числа действительных λ , при которых она фредгольмова. Если $\Omega = [0, 1] \times S$, $S = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ — тор, что соответствует периодическим по x^2, x^3 решениям, то в дополнение к указанным краевым условиям следует потребовать, чтобы

$$\int_s (u_2 - u_3) dx^2 dx^3 = 0 \text{ при } x_1 = 0, 1.$$

Новосибирский государственный
университет

Поступило
22 X 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. А. Дезин, Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 68, 1 (1962). ² Р. С. Сакс, ДАН, т. 242, № 5, 1067 (1973). ³ Рам Нгок Тхао, Дифференциальные уравнения, т. 6, № 5, 877 (1970). ⁴ Ж. де Рам, Дифференцируемые многообразия, М., 1956. ⁵ С. Л. Соболев, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 18, № 1, 3 (1954).