

Дж. А. БАБАЕВ

МЕТОД ГИПЕРСФЕР ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИСКРЕТНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 10 X 1974)

Рассматривается следующая задача линейного булевого программирования:

$$\sum_{i=1}^n d_i x_i \rightarrow \max \quad (1)$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} x_i \geq b_j, \quad j=1, \dots, m; \quad (2)$$

$$x_i = 0 \text{ или } 1, \quad i=1, \dots, n. \quad (3)$$

Здесь d_i , a_{ij} и b_j — заданные вещественные числа.

Для краткости в дальнейшем точки n -мерного евклидова пространства с координатами $x_i = 0$ или 1 будем называть точками сетки.

В работе ⁽¹⁾ показано, что множество точек сетки, удовлетворяющих ограничению

$$\sum_i a_i x_i \geq b, \quad (4)$$

совпадает с множеством точек сетки, удовлетворяющих следующему нелинейному ограничению:

$$\sum_i (a_i + 1/2 - x_i) \leq \sum_i (a_i + 1/2)^2 - 2b. \quad (5)$$

Ограничение (5) представляет собой многомерный шар с соответствующей гиперсферой радиуса r , где

$$r^2 = \sum_i (a_i + 1/2)^2 - 2b,$$

центр которой находится в точке с координатами $c_i = a_i + 1/2$.

Будем говорить, что шар (5) — шар (r, c_i) — эквивалентен ограничению (4). Очевидно, что вместо ограничения (4) можно рассматривать ограничение

$$\sum_i a_i \lambda x_i \geq \lambda b,$$

где $\lambda > 0$. При этом множество точек сетки, допустимых для ограничения, не изменится, но радиус и положение центра эквивалентного шара меняются:

$$r^2(\lambda) = (\lambda - \lambda_*)^2 \sum_i a_i^{2+1/4} n - \lambda_*^2 \sum_i a_i^2, \quad (6)$$

$$c_i(\lambda) = a_i \lambda^{1+1/2}, \quad i=1, \dots, n; \quad (7)$$

здесь

$$\lambda_* = \frac{1}{2 \sum_i a_i^2} \left(2b - \sum_i a_i \right).$$

Как будет ясно из дальнейшего, представляет интерес определить для данного ограничения эквивалентный шар минимального радиуса. Из (6) видно, что при $\lambda_* > 0$

$$r_{\min}^2 = 1/4 n - \lambda_*^2 \sum_i a_i^2.$$

При $\lambda_* < 0$, $r_{\min} = r(0)$, но принятие $\lambda = 0$ равносильно исключению ограничения из рассмотрения. Поэтому в целях сохранения ограничения в этом случае вместо шара минимального радиуса нами будет принят шар с радиусом $r = r(\lambda_0)$, где $\lambda_0 > 0$ представляет собой малую величину, значение которой снизу ограничено лишь погрешностью вычислений.

В дальнейшем всюду, говоря об эквивалентном шаре или гиперсфере, будем иметь в виду эквивалентный шар или гиперсферу минимального радиуса, или радиуса $r(\lambda_0)$.

Пусть даны два ограничения типа (4) и для каждого из них построены эквивалентные шары (r, α_i) и (R, β_i) . Поставим задачу построения шара минимального радиуса, включающего в себя пересечение двух заданных шаров. Эта задача при определенных условиях разрешается следующей теоремой.

Теорема 1. Пусть заданы два шара с координатами центров α_i и β_i , $i=1, \dots, n$, и радиусами r и R соответственно. Тогда, если

$$d^2 = \sum_i (\beta_i - \alpha_i)^2 \geq |R^2 - r^2|,$$

то шар минимального радиуса, содержащий точки E_n , входящие в пересечение обоих шаров, имеет радиус ρ , где

$$\rho^2 = r^2 - \frac{(d^2 + r^2 - R^2)^2}{4d^2} = R^2 - \frac{(d^2 + R^2 - r^2)^2}{4d^2}, \quad (8)$$

и координаты центра

$$c_i = \alpha_i + \frac{1}{2d^2} (d^2 + r^2 - R^2) (\beta_i - \alpha_i). \quad (9)$$

При $d > r + R$ две гиперсферы не пересекаются. При $d = r + R$ две гиперсферы имеют единственную общую точку ($\rho = 0$). Эта точка совпадает с центром гиперсферы (8), (9) и имеет координаты

$$x_i = \frac{1}{R + r} (r\beta_i + R\alpha_i).$$

При $d^2 < |R^2 - r^2|$ теорема 1 не применима. В этом случае в качестве шара, содержащего пересечение двух заданных шаров, можно взять шар меньшего радиуса. При $d \leq R - r$ гиперсфера радиуса r целиком содержится в шаре радиуса R .

Таким образом, по двум заданным линейным ограничениям можно построить один шар, содержащий все точки сетки, которые удовлетворяют обоим ограничениям. Однако последний шар может содержать точки сетки, которые удовлетворяют лишь одному из ограничений. Опыт расчетов показал, что таких точек тем меньше, чем меньше радиусы двух исходных шаров и чем меньше радиус шара, включающего пересечение двух исходных. Вот почему при построении гипербол мы искали соответствующие гиперболы минимального радиуса.

Пусть дана задача (1) — (3). Для каждого ограничения из (2) может быть построен эквивалентный шар. Далее, для каждой пары шагов может быть построен шар, содержащий их пересечение. Повторяя эту процедуру, в результате можно построить один шар радиуса r с координатами центра α_i , содержащий область неизвестных, допустимую для всей системы ограничений. Квадрат расстояния от центра гиперболы до точки с координатами x_i определяется как $l^2 = \sum_i (\alpha_i - x_i)^2$. Отсюда следует (2), что координаты ближайшей к центру точки сетки определяются по следующим правилам:

$$x_i = 0 \text{ при } \min [\alpha_i^2, (\alpha_i - 1)^2] = \alpha_i^2,$$

$$x_i = 1 \text{ при } \min [\alpha_i^2, (\alpha_i - 1)^2] = (\alpha_i - 1)^2,$$

а квадрат ее расстояния от центра гиперболы составляет

$$l_{\min}^2 = \sum_i \min [\alpha_i^2, (\alpha_i - 1)^2].$$

Если в ближайшей к центру гиперболы точке сетки координаты $i \in I$ изменить на альтернативные ($0 \rightarrow 1$ и $1 \rightarrow 0$), то квадрат расстояния до центра примет значение $l^2 = l_{\min}^2 + \sum_{i \in J} \delta_i$, где $\delta_i = |\alpha_i^2 - (\alpha_i - 1)^2|$. Упорядочив величины δ_i в порядке неубывания, можно построить алгоритм перебора точек сетки, входящих в шар, т. е. удовлетворяющих условию $l^2 \leq \rho^2$. Из числа этих точек подстановкой в исходную систему (2) можно отобрать допустимые.

Пусть установлена совместность системы (2). Определим оценку сверху значения целевой функции. В частности, можно взять $\bar{D} = \sum_{d_i > 0} d_i$.

Введем в рассмотрение ограничение

$$\sum_{i=1}^n d_i x_i \geq \bar{D}. \quad (10)$$

Построим соответствующий эквивалентный шар с координатами центра β_i и радиусом R . По формулам (8) и (9) построим шар (ρ, c_i) , содержащий пересечение шаров (r, α_i) и (R, β_i) . Основываясь на этом шаре, можно, согласно изложенному выше, проверить существование точки сетки, допустимой для системы ограничений (2) $\cup$ (10). Если такая точка имеется, то она является решением задачи (1) — (3).

Пусть для первоначального значения $\bar{D}$ система (2) $\cup$ (10) несовместна. Заменим $\bar{D}$ на $\bar{D} - \sigma$, где σ — произвольное положительное число. Вновь система (2) $\cup$ (10) проверяется на совместность. В случае несовместности ($\rho^2 < 0$ или нет допустимых точек) $\bar{D}$ вновь уменьшается на σ и т. д. Наконец, после определенного количества шагов будет найдена точка сетки, допустимая для системы (2) $\cup$ (10).

Соответствующее значение $\bar{D}$ примем за $\underline{D}$ — оценку снизу оптимального значения целевой функции. При этом значение $\bar{D}$ на предыдущем шаге представляет собой оценку сверху оптимального значения целевой

функции (1). Далее применяется метод дихотомии; причем $D=1/2(\bar{D}+\underline{D})$ и проверим на совместность систему (2) $\cup$ (10).

$$\sum_{i=1}^n d_i x_i \geq D. \quad (11)$$

Если эта система совместна, то полагаем $\underline{D}=D$, если несовместна, то полагаем $\bar{D}=D$. Далее, вновь по (11) определяется новое значение D и процедура продолжается до достижения $\bar{D}-\underline{D} \leq \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ задается, исходя из допустимой погрешности вычислений.

Управляя выбором σ , можно добиться того, что радиус шара (ρ, c_i) , соответствующего системе (2) $\cup$ (10), будет небольшим. Тогда проверка совместности системы не потребует большого перебора точек сетки. Это показывает, что на основе изложенного метода можно построить вычислительно эффективные алгоритмы решения задач дискретного программирования.

Изложенный метод гиперсфер может быть использован также для определения максимума

$$\frac{L'x}{L''x} = \sum_{i=1}^n d_i' x_i / \sum_{i=1}^n d_i'' x_i$$

при условиях (2), (3) и $L''x \neq 0$. Для этого необходимо построить некоторую оценку сверху $\bar{D}$ для оптимального значения функционала $L'x/L''x$. Пусть известен знак $L''x$ в оптимальном решении.

При $L''x_{\text{опт}} > 0$ ограничение (10) заменяется на $L'x - \bar{D}L''x \geq 0$, при $L''x_{\text{опт}} < 0$ — на $\bar{D}L''x - L'x \geq 0$. В остальном метод остается без изменений. Если знак $L''x_{\text{опт}}$ заранее неизвестен, то необходимо решить задачу дважды и взять решение с большим значением функционала.

Известно, что заменой переменных и введением дополнительных линейных ограничений ^(3, 4) полиномы от булевых переменных могут быть сведены к линейным функциям. Кроме того, переменные с произвольным дискретным изменением линейной заменой могут быть сведены к булевым. Отсюда видно, что метод гиперсфер применим для решения общей задачи максимизации рациональной функции дискретных переменных при полиномиальных ограничениях.

Институт кибернетики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
9 X 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ A. Claus, Hyperspheric Integer Programming. Studies in Applied Mathematics, v. 52, № 2, June, 1973. ² P. Huard, Programmes mathematiques non lineaires a variables bivalentes, Mathematical Programming Symposium, Princeton, August, 1967. ³ E. Balas, C. R., v. 258, 3817, May, 1964. ⁴ F. Glover, E. Woolsey, Operations Research, v. 21, № 1 (1973).