

УДК 517.947/42

МАТЕМАТИКА

В. Н. МОНАХОВ

ОТОБРАЖЕНИЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ РЕШЕНИЯМИ НЕЛИНЕЙНЫХ L -ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 8 VII 1974)

Рассмотрим нелинейную систему уравнений

$$F_i(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) = 0, \quad i=1, 2, \quad (1)$$

удовлетворяющую следующим условиям:

(I) она разрешима относительно производных v_x и v_y :

$$-v_y = a_{11}u_x + a_{12}u_y, \quad v_x = a_{21}u_x + a_{22}u_y, \quad (2)$$

причем при $M = \max |\ln(u_x - iu_y)| < \infty$ имеют место неравенства

$$a_{11}a_{22} - \left(\frac{a_{12} + a_{21}}{2} \right)^2 \geq \delta(M) > 0, \quad (3)$$

$$\|a_{ij}(z, w, \omega)\|_{C^1(Q)} \leq N(M) < \infty, \quad (4)$$

где $z = x + iy$, $w = u + iv$, $\omega = \ln(u_x - iu_y)$, $(z, w, \omega) \in Q = (D_z \times D_w \times D_\omega)$;

(II) система (1) эллиптическая, т. е. при $\xi^2 + \eta^2 = 1$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_x} \xi + \frac{\partial F_1}{\partial u_y} \eta, & \frac{\partial F_1}{\partial v_x} \xi + \frac{\partial F_1}{\partial v_y} \eta \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_x} \xi + \frac{\partial F_2}{\partial u_y} \eta, & \frac{\partial F_2}{\partial v_x} \xi + \frac{\partial F_2}{\partial v_y} \eta \end{pmatrix} \neq 0.$$

Будем называть такую систему уравнений L -эллиптической, а в случае, если δ и N в неравенствах (3), (4) не зависят от M , — равномерно L -эллиптической.

Другими словами, система (I) L -эллиптична, если она может быть записана в виде одного комплексного уравнения

$$w_z - q_1(z, w, \omega) w_z - q_2(z, w, \omega) \bar{w}_z = 0, \quad |q_1| + |q_2| \leq q_0(M) < 1, \quad (5)$$

и квазилинейное уравнение для функции $\omega = \ln(w_z + \bar{w}_z)$, полученное исключением из (2) производных v_x и v_y ,

$$\omega_z - \mu_1(z, w, \omega) \omega_z - \mu_2(z, w, \omega) \bar{\omega}_z = F(z, w, \omega), \quad |\mu_1| + |\mu_2| \leq \mu_0(M) < 1, \quad (6)$$

является эллиптическим (условие (II)), причем согласно (4)

$$(q_i, \mu_i, F_i) \in C(Q), \quad |F_i(z, w, \omega)| \leq N_0(M) < \infty, \quad (7)$$

где $q_i = q_i(z, w, \omega)$ выражаются через a_{ij} , а μ_i и $F = F_1 + F_2 w_z$ — через q_i и их производные по аргументам.

Уравнение (6) назовем производным нелинейного уравнения (5).

Заметим, что в силу условия (I) каждое обобщенное решение $u + iv = w(z)$, $z \in D_z$, L -эллиптической системы (I) осуществляет квазиконформное отображение области D_z . Нелинейные системы уравнений, обладающие та-

ким свойством, изучались впервые М. А. Лаврентьевым ⁽¹⁻³⁾, который ввел для них конструктивное определение сильной эллиптичности и доказал аналог теоремы Римана об отображениях односвязных областей. В дальнейшем эти результаты были обобщены в работах М. А. Лаврентьева и Б. В. Шабата ^(4, 5).

В настоящей работе устанавливается эквивалентность определений равномерной L -эллиптичности и сильной эллиптичности по М. А. Лаврентьеву и доказывается разрешимость задачи об отображении многосвязных областей решениями таких систем.

Введем в каждой точке z , где якобиан дифференцируемого отображения $w(z) = u + iv$ отличен от нуля, характеристики этого отображения θ^β , p^β , α^β и h^β — параметры параллелограмма с вершиной в точке z , который главной линейной частью отображения $w = w(z)$ преобразуется в единичный квадрат, наклоненный под углом β к оси u . Здесь θ^β — угол параллелограмма при вершине z , p^β — длина прилежащей стороны, α^β — угол ее наклона к оси x (прообраз β) и h^β — высота, противолежащая углу θ^β . Подставляя в уравнение (1) выражения производных u_x, u_y, v_x и v_y через характеристики $\theta^\beta, p^\beta, \alpha^\beta$ и h^β , приходим к уравнениям

$$G_i(x, y, u, v, \theta^\beta, p^\beta, \alpha^\beta, h^\beta) = 0, \quad i=1, 2. \quad (1^*)$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Для равномерной L -эллиптичности системы (1) необходимо и достаточно выполнения следующих условий, составляющих определение сильной эллиптичности по М. А. Лаврентьеву:

1) при любых $\beta \in [0, 2\pi]$ и $(z, w, \omega) \in Q$ система (1^*) в характеристиках может быть представлена в форме

$$h^\beta = h^\beta(x, y, u, v, p^\beta, \alpha^\beta), \quad \theta^\beta = \theta^\beta(x, y, u, v, p^\beta, \alpha^\beta),$$

где функции h^β, θ^β однозначны и дифференцируемы в Q и удовлетворяют неравенствам

$$0 < \delta < \theta^\beta < \pi - \delta, \quad \delta < \partial h^\beta / \partial p^\beta < 1/\delta;$$

2) существует хотя бы одно $\beta \in [0, 2\pi]$, для которого

$$(p^\beta)^2 \frac{\partial h^\beta}{\partial p^\beta} \neq (p^0)^2 \frac{\partial h^0}{\partial p^0}.$$

Как было установлено Б. В. Шаботом ⁽⁵⁾ для систем уравнений, не удовлетворяющих условию 2), аналог теоремы Римана об отображении может не иметь места.

Наметим доказательство теоремы об отображениях многосвязных областей решениями равномерно L -эллиптических систем уравнений. Поскольку, очевидно, условия L -эллиптичности инвариантны относительно конформных преобразований $Z = Z(z) \in C^2(D_z)$, $W = W(w) \in C^2(D_w)$, то в случае областей D_z и D_w с гладкой конечной границей можно ограничиться изучением задачи об отображении заданной круговой многосвязной области

$$D_z = D_z^0 \setminus \bigcup_{k=1}^m D_z^k \subset D_z^0; \quad D_z^k: |z - z_k| < r_k, \quad k=0, 1, \dots, m, \quad z_0=0, \quad r_0=1,$$

на некоторую аналогичную область $D_w \subset D_w^0: |w| < 1$ при фиксированной нормировке

$$w(0) = w(1) - 1 = 0. \quad (8)$$

Чтобы задача об отображении круговых многосвязных областей D_z и D_w охватывала также и случай, когда прообразы их границ $\partial D_z, \partial D_w$ при конформных отображениях не обладают достаточной гладкостью или неограничены, достаточно условие (7) L -эллиптичности заменить на следующее

ослабленное:

$$(q_i, \mu_i, F_i) \in C(Q^*), \quad |F_i(z, w, \omega)| \leq N_0(\varepsilon, M) < \infty, \quad (7^*)$$

где $Q^* = \{(D_z \setminus D_z^\varepsilon) \times D_w \times D_\omega\}$, а D_z^ε — произвольная ε -окрестность некоторого множества $\Gamma \subset \partial D_z$.

Системы, удовлетворяющие условиям (5), (6) и (7*) соответственно тому, зависят постоянные q_0, μ_0 и N_0 от M или нет, будем называть L^* -эллиптическими или равномерно L^* -эллиптическими.

Теорема 2. *Каждая равномерно L^* -эллиптическая система уравнений (1) допускает по крайней мере одно обобщенное решение*

$$u + iv = w(z) \in W_p^1(D_z) \cap W_p^2(D_z \setminus \bar{D}_z^\varepsilon), \quad p > 2,$$

квазиконформно отображающее заданную круговую многосвязную область D_z на некоторую аналогичную область D_w с нормировкой (8).

Рассмотрим определенные на множестве финитных на плоскости E функций $f(z) \in L_p(E)$, $p > 1$, линейные операторы $(^6)$

$$T(f|z) = -\frac{1}{\pi} \iint_E \frac{f(\xi) dE_\xi}{\xi - z}, \quad S(f|z) = \frac{\partial T(f|z)}{\partial z},$$

обладающие свойствами $T(f|z) \in C^\alpha(E)$, $\alpha = (p-2)/p$, $p > 2$, и $\|S\|_{L_2} = 1$. Выберем числа $p > 2$ и $p' > 1$ из условия

$$q_0 \|S\|_{L_{pp'}} < 1$$

и обозначим через $\mathfrak{M}$ множество векторов $\vec{q}^* = \{q_1^*(z), q_2^*(z)\}$ таких, что

$$\vec{q}^*(z) \in L_\lambda(D_z), \quad \lambda = \frac{p'p}{p'-1}; \quad \vec{q}^*(z) = 0, \quad z \notin (D_z \setminus \bar{G}^v),$$

$$|q_1^*(z)| + |q_2^*(z)| \leq q_0 < 1,$$

где $G^v \subset D_z$ — фиксированная v -окрестность границы ∂D_z . Пусть $w = w^*(z) \in W_p^1(D_z)$, $p > 2$, — квазиконформное отображение D_z на круговую многосвязную область D_w , удовлетворяющую линейному уравнению (5) с коэффициентами $q_i^*(z)$, и условию (8). Такое отображение, как известно $(^7, ^8)$, существует. Приблизим коэффициенты уравнения (5) функциями $q_i^v(z, w, \omega) \in C^1(Q)$, равными нулю в окрестности G^v границы ∂D_z , и, опуская индекс v в обозначениях, отображим квазиконформную D_z на D_w решением $w = w^0(z)$ линейного уравнения (5) с коэффициентами

$$q^0(z) = q_i[z, w^*(z), \omega^*(z)], \quad \omega^*(z) = T(f^*|z),$$

где $f^*(z) \in L_p(E)$, $p > 2$, $f^*(z) = 0$, $z \notin K_\delta$: $|z| < 1 + \delta$. Продолжим построенное отображение $w = w^0(z) \in W_p^2(D_z)$, $p > 2$, до гомеоморфизма $w = w^0(z)$, $(w^0 - z) \in W_p^2(E)$ плоскости E так, чтобы

$$q^0(z) = w_z^0/w_z^0 = 0 \quad \text{при } |z| > 1 + \delta, \quad q^0(z) \in C^3 \quad \text{при } z \notin D_z.$$

Пусть $f(z)$ — решение линейного сингулярного уравнения

$$f - \mu_1^0(z) \delta f - \mu_0^2(z) \bar{\delta} f = F^0(z), \quad |\mu_1^0| + |\mu_2^0| \leq \mu_0 < 1,$$

где $\mu_i^0(z) = \mu_i[z, w^0(z), \omega^*(z)]$, $F^0(z) = F[z, w^0(z), \omega^*(z)]$, $z \in D_z$, а при $z \notin D_z$ функции $\mu_i^0(z)$ и $F^0(z)$ определены как коэффициенты уравнения, производного уравнению Бельтрами $w_z - q^0(z) w_{\bar{z}} = 0$.

При каждом фиксированном $q^*(z) \in \mathfrak{M}$ решение $f(z) \in L_p(K_\delta)$ последнего уравнения порождает преобразование

$$f = R^0(f^*, q_1^*, q_2^*)$$

фиксированной сферы $\mathfrak{R}$: $\|f\|_{L_p(K_\delta)} < N$ в себя.

Рассмотрим определенное на множестве $(\mathfrak{R} \times \mathfrak{M})$ преобразование R :

$$(f, q_1, q_2) = R(f^*, q_1^*, q_2^*), \quad R = (R^0, R^1, R^2),$$

удовлетворяющее условиям теоремы Шаудера, где

$$R^i = q_i[z, w^0(z), \omega^*(z)], \quad i=1, 2.$$

Неподвижной точке этого преобразования соответствует решение следующей квазилинейной системы уравнений на плоскости E :

$$w_z - q_1 w_z - q_2 \bar{w}_z = 0, \quad \bar{w}_z - \mu_1 \omega_z - \mu_2 \bar{\omega}_z = F_0 + F_1 w_z, \quad (9)$$

где q_i , μ_i и F_i — функции аргументов z , w , ω и $q_i = \mu_i = F_i = 0$ при $|z| > 1 + \delta$.

По построению гомеоморфизм $w = w(z)$ плоскости E отображает область D_z на круговую многосвязную область D_w с нормировкой (8). Справедливо следующее утверждение.

Лемма. Пусть $w(z)$, $\omega(z)$ — решение системы уравнений (9), второе из которых является производным уравнением первого, удовлетворяющее условиям нормировки (8) и обладающее свойствами

$$\{w(z) - z\} \in W_p^2(E), \quad \omega(z) \in W_p^1(E), \quad p > 2.$$

Тогда при всех $z \in E$ выполняется равенство $\omega(z) = \ln(w_z + \bar{w}_z)$, т. е. функция $w(z)$ является одновременно и решением нелинейного уравнения (5) с коэффициентами $q_i = q_i[z, w, \ln(w_z + \bar{w}_z)]$.

Таким образом, в случае, когда коэффициенты q_i^v уравнения (5) финитны в D_z , теорема 2 доказана. Выделяя далее из компактной в $C^\alpha(D_z)$, $\alpha = (p-2)/p$, последовательности отображений $w = w^v(z)$, соответствующих q_i^v , сходящуюся в $\bar{D}_z$ подпоследовательность, получим в пределе искомое отображение $w = w(z) \in \{W_p^1(D_z) \cap W_p^2(D_z^0)\}$, $\bar{D}_z^0 \subset D_z$, удовлетворяющее по ходуному нелинейному уравнению (5) — комплексной форме L -эллиптической системы (1). Доказательство теоремы завершается исследованием дифференциальных свойств полученного отображения вблизи участков границы области D_z , не лежащих на особом множестве $\Gamma \subset \partial D_z$.

Институт гидродинамики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
4 VII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. А. Лаврентьев, Матем. сб., т. 21 (63) (1947). ² М. А. Лаврентьев, Изв. АН СССР, сер. матем., № 12 (1948). ³ М. А. Лаврентьев, Вариационный метод в краевых задачах для системы уравнений эллиптического типа, Изд. АН СССР, 1962. ⁴ М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, ДАН, т. 112, № 5 (1957). ⁵ Б. В. Шабат, ДАН, т. 136, № 6 (1961). ⁶ И. Н. Векуа, Обобщенные аналитические функции, М., 1959. ⁷ S. V. Parter, Comm. on Pure and Appl. Math., v. 13, № 2 (1960). ⁸ Li Chung, Translation of acta math. sinica, v. 13, № 3 (1963).