

Ю. Г. ЕВТУШЕНКО

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 11 X 1974)

1. Рассмотрим общую задачу нелинейного программирования об отыскании условного экстремума:

$$\min_{x \in X} F(x), \quad X = \{x \in E_n: g(x) = 0, h(x) \leq 0\}; \quad (1)$$

здесь $x \in E_n$; E_i есть i -мерное евклидово пространство; непрерывные функции $F(x)$, $g(x)$, $h(x)$ осуществляют отображения

$$F: E_n \rightarrow E_1, \quad g: E_n \rightarrow E_l, \quad E_n \rightarrow E_c$$

соответственно.

Составим функцию, аналогичную функции Лагранжа:

$$H(z) = F(x) + \sum_{i=1}^l p^i g^i(x) + \sum_{i=1}^c h^i(x) [w^i]^2,$$

где $z = (x, p, w) \in E_{n+l+c}$, $p \in E_l$, $w \in E_c$.

Введем следующую максиминную задачу:

$$\max_{p \in E_l} \max_{w \in E_c} \min_{x \in E_n} H(x, p, w). \quad (2)$$

Через $z_* = (x_*, p_*, w_*)$ будем обозначать стационарные точки, в которых выполнены необходимые условия локального максимина (2):

$$H_x(z_*) = H_p(z_*) = H_w(z_*).$$

Определение. В точке x ограничения удовлетворяют условию регулярности, если векторы $g_x(x)$ и все векторы $h_x(x)$ такие, что $h^i(x) = 0$, линейно независимы.

Определение. В точке z выполнено условие строгой дополняющей нежесткости, если $h^i(x_*) w_*^i = 0$ и из $h^i(x_*) = 0$ следует, что $w_*^i \neq 0$ для всех $i \in [1:c]$.

Лемма 1. Если $(\bar{x}, \bar{p}, \bar{w})$ — седловая точка функции $H(x, p, w)$ в задаче (2), то $\bar{x}$ является решением задачи (1), причем $F(\bar{x}) = H(\bar{x}, \bar{p}, \bar{w})$.

Лемма 2. Пусть $F(x)$, $g(x)$, $h(x)$ дважды дифференцируемы в окрестности x_* , $h(x_*) \leq 0$, в стационарной точке z_* выполнено условие строгой дополняющей нежесткости и регулярности ограничений, матрица вторых производных $H_{xx}(z_*)$ положительно определенная.

Тогда z_* является локальной, изолированной седловой точкой функции $H(z)$, а точка x_* — локальным решением задачи (1).

Решение задачи (1) заменим отысканием безусловного седла функции $H(z)$. Применим простейший градиентный метод. Тогда решение (2) сводится к отысканию предельных точек (при $t \rightarrow \infty$) решений следующей задачи Коши:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -H_x, & \dot{p} &= H_p, & \dot{w} &= H_w, & (\cdot) &= d/dt, & x(0) &= x_0, \\ p(0) &= p_0, & w(0) &= w_0. \end{aligned} \quad (3)$$

Автором в ^(1, 2) предложен ряд методов отыскания локального минимакса. Используя некоторые из них для решения (2), получим следующие три системы:

$$\dot{x} = -H_x, \quad \dot{p} = g - g'_x H_{xx}^{-1} H_x, \quad \dot{w} = 2D(w) [h - h'_x H_{xx}^{-1} H_x]; \quad (4)$$

$$\dot{x} = -H_x - H_{xx}^{-1} (g_x g + 4h_x D(w) D(w) h), \quad \dot{p} = g, \quad \dot{w} = 2D(w) h; \quad (5)$$

$$\dot{x} = -H_{xx}^{-1} H_x, \quad \dot{p} = g - g'_x H_{xx}^{-1} H_x, \quad \dot{w} = 2D(w) [h - h'_x H_{xx}^{-1} H_x]; \quad (6)$$

здесь $D(w)$ — диагональная матрица порядка $c \times c$, у которой i -й диагональный элемент есть w^i ; g_x , h_x , H_{xx} обозначают матрицы, у которых на пересечении i -й строки и j -го столбца находятся соответственно элементы $\partial g^i / \partial x^j$, $\partial h^j / \partial x^i$, $\partial^2 H / \partial x^i \partial x^j$, штрих означает транспонирование матриц.

Метод Ньютона и его дискретный вариант приводит к схемам

$$H_{zz}(z) \dot{z} = -H_z(z), \quad z(0) = z_0; \quad (7)$$

$$z_{s+1} = z_s - H_{zz}^{-1}(z_s) H_z(z_s), \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

Возможны дискретные аналоги методов (3) — (6). Для (3), например, имеем

$$x_{s+1} = x_s - \alpha H_x(z_s), \quad p_{s+1} = p_s + \alpha H_p(z_s), \quad w_{s+1} = w_s + \alpha H_w(z_s). \quad (9)$$

Теорема 1. Пусть в стационарной точке z_* выполнены условия леммы 2. Тогда методы (3) — (7) локально, экспоненциально сходятся к точке z_* , их дискретные варианты вида (9) локально сходятся к z_* при α , достаточно малом, со скоростью геометрической прогрессии.

Если, кроме того, $H_{xx}(z)$ удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки z_* , тогда метод (8) сходится к z_* с квадратичной скоростью.

Во всех приведенных схемах вместо функции H можно взять функцию

$$\Gamma = H + a \sum_{i=1}^l (g^i)^2 + b \sum_{i=1}^c [w^i]^4 [h^i]^2.$$

Теорема о сходимости методов, аналогичная 1, будет иметь место, если $a \geq 0$, $b \geq 0$.

Предложенные методы позволяют отыскивать локальные решения задачи (1) с высокой точностью. Их недостатком является локальный характер сходимости, имеющий место даже в случае задач выпуклого программирования. Методы, приводимые ниже, напротив, обеспечивают сходимость решений в целом, однако их использование затруднительно при расчете задач с высокой точностью.

2. Для (1) составим дифференцируемую, внешнюю функцию штрафа:

$$P(x, \tau) = F(x) + \tau(t) \left[\sum_{i=1}^l \varphi(|g^i|) + \sum_{i=1}^c \varphi(h_+^i) \right];$$

здесь $h_+^i(x) = h^i(x)$, если $h^i(x) > 0$, и $h_+^i(x) = 0$ в противном случае; дифференцируемые функции $\tau(t)$, $\varphi(y)$, определенные при неотрицательных значениях скалярного аргумента, удовлетворяют условиям

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \quad \varphi''(y) \geq \mu > 0 \quad \text{для } \forall y \geq 0; \quad (10)$$

$$0 < \tau(t), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \tau^{-1}(s) ds < \infty. \quad (11)$$

Для решения задачи (1) предлагается отыскивать предельные точки (при $t \rightarrow \infty$) решений следующей задачи Коши:

$$\dot{x} = -P_x(x, \tau(t)), \quad x(0) = x_0. \quad (12)$$

Множество решений задачи (1) обозначим через X . Будем говорить, что в задаче (1) выполнено обобщенное условие Слейтера, если существует точка x такая, что $g(x)=0, h(x)<0$.

Теорема 2. Пусть функции $F(x), h(x)$ непрерывно дифференцируемые, выпуклые, $g(x)$ линейные, имеют место условия (10), (11). выполнено обобщенное условие Слейтера, X — непустое, компактное множество.

Тогда решения (12) при $t \rightarrow \infty$ сходятся к X при любых значениях $x_0 \in E_n$.

Рассмотрим следующую задачу:

$$J = \max_{\tau \leq T} \min_{x \in E_n} P(x, \tau), \quad T > 0. \quad (13)$$

Ее решение достигается при $\tau = T$ и $x \in Z$, где

$$Z = \{z: \min_{x \in E_n} P(x, T) = P(z, T)\}.$$

Используя результаты ^(3, 4), можно показать, что для задачи выпуклого программирования, когда $X \neq \emptyset$, существует число $\gamma \geq 0$ такое, что для $\tilde{x} \in Z, x \in X$ имеют место оценки

$$F(x) - \gamma/T \leq P(\tilde{x}, T) \leq F(x).$$

Таким образом, при достаточно большом T решение (13) — величина J — становится сколь угодно близкой к решению (1) и задачу (1) можно заменить задачей (13).

Для нахождения максимина (13) воспользуемся методом, аналогичным ⁽⁵⁾:

$$\dot{x} = -P_x(x, \tau), \quad \dot{\tau} = P_\tau(T - \tau), \quad \tau(0) = 0, \quad x(0) = x_0. \quad (14)$$

Будем говорить, что ограничения существенны в задаче (1), если ее решение отлично от безусловного инфимума $F(x)$.

Теорема 3. Пусть функции $F(x), h(x)$ непрерывно дифференцируемые, выпуклые, $g(x)$ линейные, имеют место условия (10), Z — непустое, компактное множество, ограничения существенны.

Тогда все решения (14) $x(x_0, t)$ при $t \rightarrow \infty$ сходятся к Z при любых x_0 .

При численной реализации метода (14) делается разностная аппроксимация системы:

$$x_{s+1} = x_s - \alpha_s P_x(x_s, \tau_s), \quad \tau_{s+1} = \tau_s + \alpha_s P_\tau(x_s, \tau_s)(T - \tau_s); \quad (15)$$

здесь α_s — монотонно убывающая последовательность, удовлетворяющая условиям

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \alpha_s = 0, \quad \sum_{s=0}^{\infty} \alpha_s = \infty.$$

Теорема 4. Если выполнены условия теоремы 3, то при α_0 , достаточно малом, решение x_s разностной системы (15) сходится при $s \rightarrow \infty$ к Z при любых x_0 .

В теоремах 3, 4 можно не вводить условие дифференцируемости функций F и h . В этом случае вместо (12) и (14) следует использовать дифференциальные включения. Так, для метода (12) имеем

$$\dot{x} \in -P_x(x, \tau(t)).$$

Дискретный вариант метода приводит к итеративному процессу с многозначной правой частью, аналогичному методу обобщенного градиента.

3. Рассмотрим прямую и двойственную задачу линейного программирования

$$\min_{x \in X} c'x, \quad X = \{x: Ax = b, x \geq 0\}; \quad (16)$$

$$\max_{p \in P} b'p, \quad P = \{p: A'p \leq c\}; \quad (17)$$

здесь $x, c \in E_n, b \in E_m, A$ — матрица порядка $m \times n$.

Составим функции штрафа, положив для простоты $\varphi(y) = y^2/2$:

$$P(x, \tau) = c'x + \tau[\|Ax - b\|^2 + \|x_-\|^2]/2, \quad W(p, s) = b'p - s\|w_-\|^2/2,$$

$$w = c - A'p, \quad z_-^i = \max[0, -z^i] \geq 0, \quad z_- = [z_-^1, z_-^2, \dots, z_-^n].$$

Предложенные модификации метода штрафных функций можно применить для решения этих задач. Метод (14) для прямой и двойственной задач приводит, например, к следующим системам:

$$\dot{x} = -P_x - c - \tau[A'(Ax - b) + x_-], \quad \dot{\tau} = (T - \tau)P_\tau; \quad (18)$$

$$\dot{p} = W_p = b - sAw_-, \quad \dot{s} = (s - T)W_s. \quad (19)$$

Сходимость этих методов и их дискретных вариантов следует из теорем 3 и 4. Итеративные схемы, вытекающие из (12) и (14), отличаются исключительной простотой, объем расчетов по ним слабо зависит от размерности задач. Поэтому такие схемы целесообразно использовать для решения задач высокой размерности, не требующих высокой точности расчетов.

Аналогично (18), (19) записываются схемы (12), (14) для решения многошаговых динамических задач линейного программирования; мы не приводим их здесь из-за их громоздкости.

Вычислительный центр
Академии наук СССР
Москва

Поступило
4 X 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ю. Г. Евтушенко, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 14, № 3 (1974).
² Ю. Г. Евтушенко, Там же, т. 14, № 5 (1974). ³ И. И. Еремин, Кибернетика, № 4, 63 (1967). ⁴ В. Д. Скарин, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 13, № 5, 1186, (1973). ⁵ Ю. Г. Евтушенко, ДАН, т. 215, № 1, 38 (1974).