Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 3

УДК 517.944 МАТЕМАТИКА

М. И. НАРАЛЕНКОВ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ R^n

(Представлено академиком В. С. Владимировым 27 VI 1974)

Настоящая работа посвящена вопросу асимптотического поведения решений эллиптического уравнения с растущими коэффициентами в пространстве R^n. Ранее такими вопросами для эллиптических уравнений с коэффициентами, не зависящими от x_n, занимался П. Д. Лакс ([1]), продолжили изучение таких вопросов С. Агмон и Л. Ниренберг ([2]) для уравнения вида

$$\frac{1}{i}\frac{du}{dt}=Au$$

в банаховом пространстве с ограниченными коэффициентами. Аналогичными задачами для уравнения

$$P(D)u+\lambda Q(x, D)u=f,$$

где $P(D)$ — эллиптический оператор порядка $2m$ с постоянными коэффициентами, $Q(x, D)$ — дифференциальный оператор порядка не выше $2m$ с финитными бесконечно гладкими коэффициентами, занимался Л. Шимон ([3]).

Итак, пусть нам задано линейное дифференциальное уравнение с частными производными в пространстве R^n с гладкими коэффициентами

$$Lu=f, \tag{1}$$

где

$$Lu=\sum_{|\alpha|\leqslant 2m} a_\alpha(x)D^\alpha u;\quad D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\ldots D_n^{\alpha_n},\quad D_j=-i\frac{\partial}{\partial x_j},$$

$$\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n);\quad |\alpha|=\sum_{j=1}^n\alpha_j;\quad x=(x_1,\ldots,x_n).$$

Введем обозначения:

$$a_{2p}(x_1\xi)=\sum_{|\alpha|=2p}a_\alpha(x)\xi^\alpha,\quad 0\leqslant p\leqslant m,\quad r=(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{1/2},$$

$$\nabla=\left\{\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right\}.$$

Теорема 1. *Пусть для уравнения* (1) *будут выполнены следующие условия* I—IV:

I. *Оператор равномерно эллиптический, т. е. с некоторой постоянной $\mu>0$ выполняется неравенство*

$$\frac{1}{\mu}|\xi|^{2m}\leqslant|a_{2m}(x,\xi)|\leqslant\mu|\xi|^{2m}\quad \text{для всех } \xi\in R^n,\quad x\in R^n$$

II. *Существует такая константа* $c>0$, *что выполняется неравенство*

$$|a_{2m}(x,\xi)+a_{2p}(x,\xi)+1|\geqslant c(|\xi|^{2m}+|x|^{\gamma_0}\cdot|\xi|^{2p}+1)$$

для $|x|\geqslant R$, *где* R *достаточно велико*, $\xi\in R^n$ *и* γ_0 *есть любое фиксированное число, удовлетворяющее неравенству* $0<\gamma_0<2p$.

III. а) $|a_\alpha(x)|=o(|x|^{\gamma_0|\alpha|/2p})$ *при* $|x|\to\infty$, $|\alpha|=1, 2, \ldots, 2p-1$;

б) $|a_\alpha(x)|=o(|x|^{\gamma_0(2m-|\alpha|)/(2m-2p)})$ *при* $|x|\to\infty$, $|\alpha|=2p+1, \ldots$ $\ldots, 2m-1$;

в) $|\nabla a_\alpha(x)|=o(1/|x|)$ *при* $|x|\to\infty$, $|\alpha|=2m$;

г) $\lim\limits_{|x|\to\infty} a_0(x)=1$.

IV. $f(x)$ *есть финитная функция, а также, если известно, что* $u(x)\in H_{2m}(R^n)$ *есть решение уравнения* (1), *то для достаточно больших по модулю* x *будет выполняться неравенство*

$$|u|<ce^{-r^\varepsilon},\quad c>0,\quad \varepsilon>0.$$

Доказательство. Из работы ([4]) при выполнении условий I—III вытекает неравенство

$$\|u\|_{2m}(R^n)\leqslant c_1\{\|Lu\|_0(R^n)+\|u\|_0(\Omega_R)\},$$

где $c_1>0$ не зависит от $u(x)$. Рассмотрим далее функцию

$$\theta_N(r)=\begin{cases} r & \text{при } 1\leqslant r\leqslant N,\\ \text{гладкая} & \text{при } r<1,\\ N+1 & \text{при } r\geqslant N+1,\end{cases}$$

и такую, что оценка $|D^\beta\theta_N(r)|\leqslant K$ выполняется для всех $1\leqslant\beta\leqslant 2m$, $N\leqslant r\leqslant N+1$, где K — константа. Сделаем в уравнении (1) замену $u(x)=$ $=v(x)\cdot e^{-\theta_N^\varepsilon(r)}$, где ε будет выбрано ниже. В результате такой замены получаем

$$\sum_{|\alpha|\leqslant 2m} a_\alpha(x)\cdot D^\alpha(v(x)\cdot e^{-\theta_N^\varepsilon(r)})=\sum_{|\alpha|\leqslant 2m} a_\alpha(x)\cdot\sum_{\beta\leqslant\alpha} d_\beta D^\beta v\cdot D^{\alpha-\beta}(e^{-\theta_N^\varepsilon(r)})=$$

$$=\sum_{|\beta|\leqslant 2m} d_\beta D^\beta v\cdot\sum_{\substack{\alpha\geqslant\beta\\|\alpha|\leqslant 2m}} a_\alpha(x)\cdot D^{\alpha-\beta}(e^{-\theta_N^\varepsilon(r)})=$$

$$=e^{-\theta_N^\varepsilon(r)}\cdot\sum_{|\beta|\leqslant 2m} d_\beta\cdot D^\beta v\cdot\sum_{\substack{\alpha\geqslant\beta\\|\alpha|\leqslant 2m}} a_\alpha(x)\cdot\Phi_{\alpha-\beta,N,\varepsilon}(r),$$

т. е. уравнение (1) примет вид

$$L_{\varepsilon,N}v(x)=f(x)\cdot e^{\theta_N^\varepsilon(r)},\tag{2}$$

$$L_{\varepsilon,N}=\sum_{|\beta|\leqslant 2m} a'_{\beta,N,\varepsilon}(x)D^\beta,\quad a'_{\beta,N,\varepsilon}(x)=\sum_{\substack{\alpha\geqslant\beta\\|\alpha|\leqslant 2m}} a_\alpha(x)\cdot d_\beta\cdot\Phi_{\alpha-\beta,N,\varepsilon}(x).$$

Заметим, что

$$|\Phi_{\alpha-\beta,N,\varepsilon}(r)|\leqslant\frac{c_{\alpha-\beta}}{r^{|\alpha-\beta|-|\alpha-\beta|\varepsilon}}.\tag{3}$$

Выбрав

$$\varepsilon<\min_{2p\leqslant|\alpha|\leqslant 2m}\frac{|\alpha|(2m-2p)-(2m-|\alpha|)\gamma_0}{(2m-2p)|\alpha|}$$

а также воспользовавшись неравенством (3) получим, что выполняются условия:

а) $|a'_{\beta,N,\varepsilon}(x)|=o(|x|^{\gamma_0|\beta|/(2p)})$ при $|x|\to\infty$, $|\beta|=1,2,\ldots,2p-1$;

б) $|a'_{\beta,N,\varepsilon}(x)|=o(|x|^{\gamma_0(2m-|\beta|)/(2m-2p)})$ при $|x|\to\infty$, $|\beta|=2p+1,\ldots$ $2m-1$;

в) $\lim\limits_{|x|\to\infty} a'_{0,N,\varepsilon}(x)=1$;

г) $\left|\sum\limits_{|\beta|=2m} a'_{\beta,N,\varepsilon}(x)\cdot\xi^\beta+\sum\limits_{|\beta|=2p} a'_{\beta,N,\varepsilon}(x)\xi^\beta+1\right|\geqslant c,\ (|\xi|^{2m}+|x|^{\gamma_0}\cdot|\xi|^{2p}+1)$;

д) $a'_{\beta,N,\varepsilon}(x)=a_\beta(x)$ при $|\beta|=2m$;

е) $f_1(x)=f(x)\cdot e^{\theta_N^\varepsilon(r)}$ есть финитная функция.

Значит, для уравнения (2) условия I—III выполняются.

Предложение 1. *Если* $u(x)\in H_{2m}(R^n)$, *то*

$$e^{r^\varepsilon}u(x)\in H_{2m}(R^n).$$

Так как для уравнения (2) выполнены все условия I—IV, то

$$v_N(x)=e^{\theta_N^\varepsilon(r)}u(x)\in H_{2m}(R^n)$$

при каждом фиксированном N. Применяя теорему 1 из ([4]), получим

$$\|v_N(x)\|_{2m}(R^n)\leqslant c_1\{\|f_1\|_0(R^n)+\|v_N\|_0(\Omega_R)\}\leqslant c_2, \tag{4}$$

где c_2 не зависит от N. Т. е. оценка (4) выполняется для всех N равномерно. Устремляя в неравенстве (4) $N\to\infty$, получим

$$\|e^{r^\varepsilon}u(x)\|_{2m}(R^n)\leqslant c_2. \tag{5}$$

Итак, мы доказали предложение 1. Далее можно доказать, что если $u(x)\in H_{2m}(R^n)$ есть решение уравнения (1), то выполняется неравенство

$$u^2(p)\leqslant\int\limits_{S_{\varepsilon_1}(P)}u^2(p)\,dx+c_2\max_{S_{\varepsilon_1}(P)}|f|^2, \tag{5'}$$

где $S_{\varepsilon_1}(P)$ — шар радиуса ε_1 с центром в точке P.

Так как f есть финитная функция, то для достаточно больших по модулю x неравенство (5′) можно переписать в виде

$$u^2(p)\leqslant\int\limits_{S_{\varepsilon_1}(P)}u^2(p)\,dx. \tag{5''}$$

Итак, мы имеем

$$u^2(p)\leqslant\int\limits_{S_{\varepsilon_1}(P)}u^2(p)e^{2r^\varepsilon}e^{-2r^\varepsilon}dx\leqslant e^{-2|p-\varepsilon_1|^\varepsilon}\int\limits_{S_{\varepsilon_1}(P)}u^2(p)e^{2r^\varepsilon}dx\leqslant$$

$$\leqslant e^{-2|p-\varepsilon_1|^\varepsilon}\int\limits_{R^n}u^2(x)e^{2r^\varepsilon}dx\leqslant e^{-2r^\varepsilon}\int\limits_{R^n}u^2(x)e^{2r^\varepsilon}dx. \tag{6}$$

Применяя к правой части (6) неравенство (5), получим, что $u^2(x)\leqslant\leqslant c_2^2\cdot e^{-2r\varepsilon}$, т. е. $|u(x)|\leqslant c_2e^{-\gamma r\varepsilon}$. Теорема доказана.

Замечания. 1). Теорема 1 остается верной, если $f(x)$ есть не финитная, а достаточно быстро убывающая функция.

2) Теорема 1 остается в силе, если предположить, что решение $u(x)$ принадлежит $L_2(R^n)$, а не $H_{2m}(R^n)$.

Пусть мы имеем уравнение

$$Lu=f, \tag{7}$$

$$Lu=L_1u+q(x)L_2u,\quad L_1=\sum_{|\alpha|\leqslant 2m}a_\alpha^{(1)}(x)D^\alpha,\quad L_2=\sum_{|\alpha|\leqslant 2p}a_\alpha^{(2)}(x)D^\alpha.$$

Предположим, что выполняются следующие условия:

I. Оператор L есть равномерно эллиптический.

II. Существует постоянная $c_1>0$, что выполняется неравенство

$$|a_{2m}^{(1)}(x,\xi)+q(x)a_{2p}^{(2)}(x,\xi)|\geqslant c_1(|\xi|^{2m}+q(x)(|\xi|^{2p}+1))$$

для достаточно больших по модулю x, $\xi\in R^n$, $q(x)>0$, где

$$a_{2m}^{(1)}(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=2m}a_\alpha^{(1)}(x)\xi^\alpha,\quad a_{2p}^{(2)}(x,\xi)=\sum_{|\alpha|\leqslant 2p}a_\alpha^{(2)}(x)\xi^\alpha.$$

III. $q(x)\to+\infty$ степенным образом.

IV. а) $|\nabla_\alpha^{(1)}(x)|=o(1/|x|)$ при $|x|\to\infty$, $|\alpha|=2m$;

б) $|a_\alpha^{(1)}(x)|=(o(q(x))^{(2m-|\alpha|)/(2m-2p)})$ при $|x|\to\infty$, $|\alpha|=2p+1,\ldots$ $\ldots,2m-1$;

в) $|a_\alpha^{(1)}(x)|=o(q^2(x))$ при $|x|\to\infty$, $|\alpha|=0,1,\ldots,2p$;

г) $|\nabla_\alpha^{(2)}(x)|=o(1/|x|)$ при $|x|\to\infty$, $|\alpha|=0,1,\ldots,2p$;

д) $|a_{2p}^{(2)}(x,\xi)|\leqslant c_3(|\xi|^{2p}+1)$, гда $|x|\geqslant R$; R — достаточно велико, $\xi\in R^n$.

Тогда будут справедливы следующие утверждения.

Теорема 2. *Если выполнены все условия* I—IV *для уравнения* (7), *то для любой* $u(x)\in H_{2m}(R^n)$ *выполняется неравенство*

$$\|u\|_{2m}(R^n)\leqslant c\{\|Lu\|_0(R^n)+\|u\|_0(\Omega_R)\},$$

где c не зависит от $u(x)$.

Следствие. *Если выполнены условия* I—IV *для уравнения* (7), *то ядро оператора L конечномерно.*

Теорема 3. *Если выполнены условия* I—IV *для уравнения* (7), *то существует ограниченный оператор R: $H_0(R^n)\to H_{2m}(R^n)$ такой, что $LRf=f+Tf$ для любой $f\in H_0(R^n)$. Оператор T вполне непрерывен в $H_0(R^n)$.*

Следствие. *Коядро оператора L конечномерно.*

Доказательство этих теорем основывается на специальном разбиении единицы в пространстве R^n.

Теорема 4. *Если для уравнения* (7) *выполнены условия* I—IV, *$f(x)$ есть финитная функция и $u(x)\in H_{2m}(R^n)$ есть решение уравнения* (7), *то для достаточно больших по модулю x будет выполняться неравенство*

$$|u(x)|\leqslant ce^{-\gamma r},\quad c>0,\quad \gamma>0.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1, только замену в уравнении (7) нужно делать такую: $u(x)=v(x)\cdot e^{-\gamma\theta_N(r)}$.

Замечание 1. Замечание 2 к теореме 1 также остается в силе.

Московский институт
электронного машиностроения

Поступило
17 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *П. Д. Лакс*, Математика, т. 3, № 4 (1959). [2] *S. Agmon, L. Nirenberg*, Comm. Pure and Appl. Math., v. 16, № 2 (1963). [3] *Л. Шимон*, Вестн. Московск. ун-та, матем., механ., № 3 (1973). [4] *М. И. Нараленков*, УМН, т. 28, в. 6 (1973).