Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 3

УДК 513.88

МАТЕМАТИКА

О. И. РЕЙНОВ

ОПЕРАТОРЫ ТИПА RN В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 10 VII 1974)

Во многих теоремах об интегральном представлении линейных операторов или о совпадении тех или иных (в общем случае различных) классов операторов часто фигурирует одно из следующих условий на банахово пространство X: а) пространство X рефлексивно, б) X имеет сепарабельное сопряженное, в) X является сепарабельным сопряженным пространством (см., например, ([3], [5], [6])). Оказывается, что во многих случаях это условие можно заменить на следующее: X или X^* обладает свойством Радона — Никодима (свойством RN). Более того, последнее условие является не только достаточным, но и необходимым для справедливости ряда теорем такого типа (см. теоремы 1, 2, 4, 5 при $X=Y$ и $T=\mathrm{id}$).

В настоящей работе вводится и изучается класс $RN(X, Y)$ линейных операторов T, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y, обладающих следующим свойством (относительно пространства с мерой (Ω, Σ, μ)): для любой X-значной μ-абсолютно непрерывной меры $\bar{m}$: $\Sigma\to X$ ограниченной вариации мера $T\bar{m}$: $\Sigma\to Y$ допускает интегральное представление $(T\bar{m})(A)=\int\limits_A \bar{f}\,d\mu$, где функция $\bar{f}$: $\Omega\to Y$ измерима по Бохнеру и $\|\bar{f}\|_Y\in L^1$. Наличие свойства RN у банахова пространства X эквивалентно утверждению $\mathrm{id}\in RN(X, X)$, где id: $X\to X$ — тождественный оператор. Введение операторов типа RN позволяет объединить различные частные случаи, которые до сих пор рассматривались по отдельности. В работе получен ряд эквивалентных характеристик операторов типа RN. В частности, устанавливается связь между свойствами мер на слабо борелевских множествах сопряженных банаховых пространств и отображениями из класса RN.

Говоря о полуупорядоченных пространствах, мы придерживаемся терминологии монографии ([1]).

1. Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с конечной положительной не чисто атомической мерой; E — некоторый фундамент в K-пространстве $S(\Omega, \Sigma, \mu)$ всех измеримых п.в. конечных на Ω функций, который является одновременно банаховым KN-пространством, удовлетворяющим условию (A); X, Y — банаховы пространства; $E(X)$ — пространство измеримых по Бохнеру X-значных функций $\bar{f}$, для которых $\|\bar{f}\|_X\in E$.

Введем следующие обозначения: $L(X, Y)$ — пространство линейных непрерывных операторов из X в Y; $P(X, E)\subset L(X, E)$ — пространство правильных операторов ([2]); $S(E, X)\subset L(E, X)$ — пространство суммирующих операторов ([2]); $P_0(X, E)\subset L(X, E)$ — пространство операторов, допускающих представление $T=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\langle\cdot, x_n'\rangle e_n$, где $x_n'\in X^*$, $e_n\in E$, причем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n'\|\,|e_n|$ сходится в E; $\bar{S}(L^\infty, X)\subset L(L^\infty, X)$ — пространство операторов T, для которых существует элемент $e'(T)\in L^1$ такой, что

$\|Te\|\leqslant\int\limits_{\Omega}|e|e'(T)\,d\mu$ для всех $e\in L^\infty$. Пространства операторов N_p и J_p определены в (4).

2. Будем говорить, что оператор $T\in L(X, Y)$ является **оператором типа** RN, если он переводит всякую μ-абсолютно непрерывную X-значную меру $\bar m$: $\Sigma\to X$ ограниченной вариации в Y-значную меру $T\bar m$: $\Sigma\to Y$, для которой существует функция $\bar f\in L^1(Y)$ такая, что $(T\bar m)(A)=\int\limits_A \bar f\,d\mu$ для всех $A\in\Sigma$. Следующее утверждение (доказательство которого аналогично доказательству теоремы 2 работы (8)) показывает независимость этого определения от пространства с мерой (Ω, Σ, μ).

Предложение 1. *Пусть $T\in L(X, Y)$. Оператор T является оператором типа RN относительно (Ω, Σ, μ) тогда и только тогда, когда он является оператором типа RN относительно пространства $([0, 1], \mathfrak{B}, \mu_0)$, где $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств отрезка $[0, 1]$, а μ_0 — мера Лебега.*

Предложение 2. *Всякий слабо компактный оператор является оператором типа RN.*

Предложение 3. *Оператор $T\in L(L^1, X)$ есть оператор типа RN тогда и только тогда, когда существует функция $\bar f\in L^\infty(X)$ такая, что $Tf=\int f\bar f\,d\mu$ для любой функции $f\in L^1$.*

Множество всех операторов типа RN, действующих из X в Y, обозначим через $RN(X, Y)$.

Теорема 1. *Пусть $T\in L(X, Y)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) $T\in RN(X, Y)$;

2) *для каждого оператора $U\in S(E, X)$ существует функция $\bar g\in E^*(Y)$ такая, что $TUe=\int e\bar g\,d\mu$ для всех $e\in E$;*

3) *для каждого оператора $U\in L(L^1, X)$ существует функция $\bar g\in L^\infty(Y)$ такая, что $TUf=\int f\bar g\,d\mu$ для всех $f\in L^1$;*

4) *для каждого оператора $U\in\bar S(L^\infty, X)$ существует функция $\bar g\in L^1(Y)$ такая, что $TUf=\int f\bar g\,d\mu$ для всех $f\in L^\infty$.*

Теорема 2. *Пусть $T\in L(X, Y)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) $T^*\in RN(Y^*, X^*)$;

2) *для каждого оператора $U\in P(Y, E)$ существует функция $\bar g\in E(X^*)$ такая, что $UTx=\langle x, \bar g\rangle$ для всех $x\in X$;*

3) *для каждого оператора $U\in P(Y, E)$ оператор UT приближается конечномерными операторами в пространстве $P(X, E)$;*

4) *для каждого оператора $U\in P(Y, E)$ имеет место включение $UT\in P_0(X, E)$.*

Следствие. *Пусть $1\leqslant p<\infty$ и $T\in L(X, Y)$. Если T^* — оператор типа RN, то для всякого банахова пространства Z и любого оператора $U\in J_p(Y, Z)$ оператор UT принадлежит пространству $N_p(X, Z)$.*

Замечание. В случаях, когда оператор T слабо компактен или X^* сепарабельно, следствие из теоремы 2 получено при $p=1$ в (3), а при произвольном $p\in[1, +\infty)$ — в (5) (ср. ниже теорема 5).

Теорема 3. *Пусть $T\in L(X, Y)$. Следующие условия равносильны:*

1) $T^*\in RN(Y^*, X^*)$;

2) *для всякой ограниченной Y-скалярно измеримой функции $\bar f$: $\Omega\to Y^*$ существует ограниченная измеримая по Бохнеру функция $\bar g$: $\Omega\to X^*$ такая, что функция $T^*\bar f$ X-скалярно эквивалентна функции $\bar g$, т. е. $\langle T^*\bar f, x\rangle=\langle\bar g, x\rangle$ п.в. для любого $x\in X$;*

3) *для всякой Y-скалярно измеримой функции $\bar f$: $\Omega\to Y^*$ существует измеримая по Бохнеру функция $\bar g$: $\Omega\to X^*$ такая, что функция $T^*\bar f$ X-скалярно эквивалентна функции $\bar g$.*

Теорема 4. *Пусть $T\in L(X, Y)$. Следующие условия равносильны:*

1) $T\in RN(X, Y)$;

2) *для всякого банахова пространства Z и любого оператора $U \in J(Z, X)$ оператор TU является ядерным;*

3) *для всякого оператора $U \in J(L^\infty, X)$ оператор TU является ядерным.*

Замечание. В случаях, когда оператор T слабо компактен или Y — сепарабельное сопряженное пространство, выполнение условия 2) теоремы 4 доказано в ([3]).

Теорема 5. *Пусть $T \in L(X, Y)$. Следующие условия равносильны:*

1) $T^* \in RN(Y^*, X^*)$;

2) *для всякого банахова пространства Z и любого оператора $U \in J(Y, Z)$ оператор UT является ядерным;*

3) *для всякого оператора $U \in J(Y, L^1)$ оператор UT является ядерным.*

3. Пусть K — отделимый компакт, $\mathfrak{B}$—σ-алгебра борелевских множеств пространства K, μ — конечная положительная мера Радона на K. Нам понадобится следующее определение, введенное в ([3]): множество $A \in S(K, \mathfrak{B}, \mu)$ называется равностепенно измеримым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует компакт $K_\varepsilon \subset K$ и множество A_ε равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных на K_ε функций таких, что $\mu(K \setminus K_\varepsilon) < \varepsilon$ и для всякой функции $f \in A$ найдется функция $f_0 \in A_\varepsilon$, равная f п.в. на K_ε.

Пусть $B \subset X$ — ограниченное множество в B-пространстве X. Множество B будем называть измеримым в себе, если для любого отделимого компакта K и всякой меры Радона μ на K выполнено следующее условие: для любого фундамента $E \subset S(K, \mathfrak{B}, \mu)$, который является одновременно банаховым KN-пространством с условием (A), и всякого оператора $T \in P(X, E)$ множество TB является равностепенно измеримым.

Теорема 6. *Пусть $T \in L(X, Y)$. Следующие условия равносильны:*

1) $T^* \in RN(Y^*, X^*)$;

2) *оператор T переводит единичный шар пространства X в множество, измеримое в себе.*

Следствие. *Пространство X^* обладает свойством RN тогда и только тогда, когда единичный шар пространства X является множеством, измеримым в себе.*

4. Пусть Z — банахово пространство и K — некоторое $\sigma(Z^*, Z)$-компактное множество в пространстве Z^*. Будем говорить, что мера $\mu \in C^*(K)$ является S-мерой, если существует последовательность сильных компактов $\{K_n\}^\infty_{n=1}$ таких, что $\mu(K \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n) = 0$.

Теорема 7. *Пусть $T \in L(X, Y)$, K — единичный шар пространства Y^*, снабженный топологией $\sigma(Y^*, Y)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) $T^* \in RN(Y^*, X^*)$;

2) *оператор T^* переводит всякую меру $\mu \in C^*(K)$ в S-меру на T^*K;*

3) *функция $\bar{f} = T^*|_K$: $K \to X^*$, порожденная оператором T^*, универсально измерима (т. е. измерима по Лузину относительно любой положительной меры $\mu \in C^*(K)$);*

4) *для всякого отделимого компакта Ω с конечной положительной мерой Радона μ и для любой $\sigma(Y^*, Y)$-измеримой функции $\bar{g}$: $\Omega \to Y^*$ функция $T^*\bar{g}$: $\Omega \to X^*$ является сильно измеримой.*

Следствие 1. *Пусть K — единичный шар пространства X^* с топологией $\sigma(X^*, X)$. Пространство X^* обладает свойством RN в том и только том случае, когда выполняется любое из следующих условий:*

1) *всякая мера $\mu \in C^*(K)$ является S-мерой;*

2) *тождественное отображение j: $K \to X^*$ универсально измеримо;*

3) *для всякого отделимого компакта Ω с конечной положительной мерой Радона μ множество $\sigma(X^*, X)$-измеримых X^*-значных функций совпадает с множеством сильно измеримых X^*-значных функций.*

Обозначим через $\mathfrak{B}(Z)$ σ-алгебру борелевских множеств банахова пространства Z, через $\mathfrak{B}_\sigma^*(Z^*)$ — σ-алгебру $\sigma(Z^*, Z)$-борелевских множеств пространства Z^*.

Следствие 2. *Пусть $T \in L(X, Y)$. Оператор T^*-является оператором типа RN тогда и только тогда, когда он переводит всякую меру ν, заданную на $\mathfrak{B}_\sigma^*(Y^*)$, в меру на $\mathfrak{B}_\sigma^*(X^*)$, сосредоточенную на сильном σ-компакте. В частности, если T^* — оператор типа RN, то образ любой меры ν на $\mathfrak{B}_\sigma^*(Y^*)$ при отображении T^* является мерой на σ-алгебре $\mathfrak{B}(X^*)$.*

Следствие 3. *Если пространство X^* обладает свойством RN, то всякая мера на $\mathfrak{B}_\sigma^*(X^*)$ продолжается единственным образом до меры на $\mathfrak{B}(X^*)$.*

5. Следующий результат был доказан Гротендиком ([3]) для слабо компактных операторов. Используя теоремы 4 и 5, доказательство Гротендика можно перенести и на более общий случай операторов типа RN.

Теорема 8. *Пусть X, Y, Z — банаховы пространства, $T \in L(X, Y)$, $U \in L(Y, Z)$. Предположим, что существует непрерывный проектор P: $X^{**} \to X$, $\|P\| = 1$ и выполнено одно из следующих условий:*

1) U равномерно на каждом компакте приближается конечномерными отображениями, $T \in RN(X, Y)$;

2) T равномерно на каждом компакте приближается конечномерными отображениями, $U^* \in RN(Z^*, Y^*)$.

Тогда UT есть предел, равномерный на каждом компакте, конечномерных отображений, норма которых не превосходит $\|UT\|$.

Следующее утверждение, обобщающее теорему (XI, 2, 1) из ([7]), получается с помощью следствия 3 из теоремы 7.

Предложение 4. *Пусть $0 \leqslant p \leqslant 1$ и U — абсолютно p-суммирующее отображение из банахова пространства X в банахово пространство Y. Если Y есть сопряженное пространство, обладающее свойством RN, то U является аппроксимативно p-радонифицирующим отображением из X в Y.*

Автор глубоко благодарен Б. М. Макарову за постоянное внимание к работе.

Ленинградское отделение
Центрального экономико-математического института
Академии наук СССР

Поступило
29 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Б. З. Вулих*, Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., 1961. [2] *В. Левин*, Тр. Московск. матем. общ., т. 20, 42 (1969). [3] *A. Grothendieck*, Mem. Am. Math. Soc., v. 16 (1955). [4] *A. Persson, A. Pietsch*, Stud. Math., v. 33, 19 (1969). [5] *A. Persson*, Stud. Math., v. 33, 213 (1969). [6] *Tin Kin Wong*, Stud. Math., v. 39, 181 (1971). [7] *L. Schwartz*, Applications radonifiantes, Seminaire 1969—1970. [8] *S. D. Chatterji*, Math. Scand., v. 22, № 1, 21 (1968).