Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 3

УДК 517.55 *МАТЕМАТИКА*

А. В. РОМАНОВ

ФОРМУЛА И ОЦЕНКИ ДЛЯ РЕШЕНИЙ КАСАТЕЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ КОШИ — РИМАНА

(Представлено академиком В. С. Владимировым 8 VII 1974)

Пусть D — строго псевдовыпуклая область в $\mathbf{C}^n$, т. е. $D=\{z: \rho(z)<0\}$, где $\rho(z)$ — вещественнозначная функция, дважды непрерывно дифференцируемая в окрестности замыкания $\bar D$ области D, $\operatorname{grad}\rho(z)\neq 0$ на ∂D и квадратичная форма $\sum\limits_{j,k=1}^{n}\dfrac{\partial^2\rho}{\partial z_j\,\partial\bar z_k}\omega_j\bar\omega_k$ строго положительна для всех $z\in\partial D$ и всех $\omega=(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)\neq 0$.

Пусть

$$V_\delta=\{z:\ |\rho(z)|<\delta\},\qquad D_\delta=V_\delta\cup D;$$

$$U_{\varepsilon,\delta}=\{(\zeta, z):\ \zeta\in V_\delta,\ z\in D_\delta,\ |\zeta-z|<\varepsilon\};$$

$$F(\zeta,z)=2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\rho}{\partial\zeta_i}(\zeta_i-z_i)-\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2\rho}{\partial\zeta_i\,\partial\zeta_j}(\zeta_i-z_i)(\zeta_j-z_j).$$

При сделанных предположениях существуют (см. [1, 2]) постоянные γ, δ, ε, ε^0, $\varepsilon>\varepsilon^0$, функция $\Psi\in C^1(V_\delta, H(D_\delta))$ и функция $G\in C^1(U_{\varepsilon,\delta})$ такие, что:

$$\Psi=F\cdot G \text{ на } U_{\varepsilon,\delta},\quad |G|>\gamma \text{ на } U_{\varepsilon,\delta},\ |\Psi|>\gamma/2 \text{ вне } U_{\varepsilon-\varepsilon^0,\delta};$$

$$\operatorname{Re}F(\zeta, z)\geqslant\rho(\zeta)-\rho(z)+\gamma|\zeta-z|^2 \text{ на } U_{\varepsilon,\delta};\tag{1}$$

$$\Psi(\zeta,z)=\sum_{i=1}^{n}(\zeta_i-z_i)\Psi_i(\zeta,z),$$

где $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n\in C^1(V_\delta, H(D_\delta))$. Здесь $C^1(V_\delta, H(D_\delta))$ обозначает пространство непрерывно дифференцируемых в области V_δ функций, со значениями в пространстве Фреше голоморфных функций $H(D_\delta)$. Для внешней дифференциальной формы f мы будем писать $f\in X$, если все ее коэффициенты принадлежат функциональному пространству X. Введем для $0\leqslant q\leqslant n-1$ следующие дифференциальные формы:

$$U_{n,q}=(2\pi i)^{-n}\binom{n-1}{q}|\zeta-z|^{-2n}D(\bar\zeta_k-\bar z_k\,\underbrace{d\bar z_k\ldots d\bar z_k}_{q\text{ раз}}\,\underbrace{d\bar\zeta_k\ldots d\bar\zeta_k}_{n-q-1\text{ раз}})$$

(в $n\times n$ определителе выписана k-я строка, определитель раскрывается по столбцам),

$$\omega_{n,q}=(2\pi i)^{-n}\binom{n-1}{q}\Psi^{-n}D(\Psi_k\underbrace{\bar\partial_z\Psi_k\ldots\bar\partial_z\Psi_k}_{q\text{ раз}}\underbrace{\bar\partial_\zeta\Psi_k\ldots\bar\partial_\zeta\Psi_k}_{n-q-1\text{ раз}})$$

(в силу (1) $\omega_{n,q}=0$ при $q\neq 0$).

Для $0\leqslant q\leqslant n-2$ положим

$$B_{n,q}=(-1)^{q+1}A_{n,q}=\sum_{r=0}^{n-q-2}c_rD_r,$$

$$D_r=\Psi^{-(r+1)}|\zeta-z|^{-2(n-r-1)}D(\Psi_k\bar{\zeta}_k-\bar{z}_k\underbrace{d\bar{z}_k\ldots d\bar{z}_k}_{q\text{ раз}}\underbrace{\bar{\partial}_\zeta\Psi_k\ldots\bar{\partial}_\zeta\Psi_k}_{r\text{ раз}}\underbrace{\partial\bar{\zeta}_k\ldots\partial\bar{\zeta}_k}_{n-q-r-2\text{ раз}})$$

Положим по определению $A_{n,-1}=B_{n,n-1}=A_{n,n-1}=0$.

Определенные выше формы связаны равенством

$$U_{n,q}(\zeta,z)-\omega_{n,q}(\zeta,z)=\bar{\partial}_z A_{n,q-1}(\zeta,z)+\bar{\partial}_\zeta B_{n,q}(\zeta,z), \qquad (2)$$

которое выполняется при всех (ζ, z) таких, что $\Psi(\zeta, z)$ определена и не равна 0 ([3], [5]).

Будем использовать далее следующий результат (([4]), $q=1$, ([5]), $q>1$). Пусть $f(\zeta)$ — форма типа $(0, q)$, $f\in C(\bar{D})$ и $\bar{\partial}f=0$. Тогда форма $g(z)$, определенная в области D формулой

$$g(z)=\int_{\partial D}f(\zeta)\wedge A_{n,q-1}\wedge d\zeta-\int_D f(\zeta)\wedge U_{n,q-1}\wedge d\zeta, \qquad (3)$$

является непрерывным в D решением уравнения $\bar{\partial}g=f$. Пользуясь формулой (3), доказываем сначала следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть D — строго псевдовыпуклая область с границей класса C^2, f — форма типа $(0, q)$, $1\leqslant q\leqslant n-1$, $f\in L^p(D)$ и $\bar{\partial}f=0$.*

Тогда существует форма $g\in L^p_{1/2}(D)$ такая, что $\bar{\partial}g=f$ и

$$\|g\|_{L^p_{1/2}(D)}\leqslant\|f\|_{L^p(D)}, \qquad 1\leqslant p\leqslant\infty.$$

Принимаем здесь следующее определение пространств функций $L_\alpha^p(D)$, $0<\alpha<1$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. Скажем, что $\varphi\in L_\alpha^p(D)$, если

$$\left(\int_{D_{3|s|}}|\varphi(x+s)-\varphi(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\leqslant M|s|^\alpha,$$

где $D_{3|s|}$ обозначает область D с удаленной $3|s|$-окрестностью границы ∂D. Как известно, при $q=n$ имеют место более сильные оценки: если $f\in L^p(D)$, то

$$g\in W_1^p(D) \text{ при } 1<p<\infty, \qquad g\in L_{\ln}^p(D) \text{ при } p=1,\infty; \qquad (4)$$

через $L_{\ln}^p(D)$ обозначаем пространство следов на D функций φ, удовлетворяющих неравенствам

$$\left(\int_{R^{2n}}|\varphi(x+s)-\varphi(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\leqslant M|s|\,|\ln|s|\,|.$$

Запишем формулу (3) в виде $g=g_1+g_2$, где

$$g_1=\int_{\partial D}f(\zeta)\wedge A_{n,q-1}\wedge d\zeta, \qquad g_2=\int_D f(\zeta)\wedge U_{n,q-1}\wedge d\zeta.$$

Доказательство теоремы 1 основано на следующей лемме

Лемма 1.

$$\left(\int_{D_{-\sigma}}|\operatorname{grad} g_1(z)|^p\,dV_z\right)^{1/p}\leqslant K\sigma^{-1/2}\|f\|^p_{L^p(D)},$$

где dV_z — мера Лебега, $\sigma>0$, $D_{-\sigma}=\{z\colon \rho(z)<-\sigma\}$.

При $p=\infty$ теорема 1 была доказана в работе ([6]). Ограниченность оператора решения $\bar{\partial}$-уравнения из L^p в L^p была установлена в ([7], [2]).

Нашей целью далее является получение формулы, выражающей граничные значения решения $\bar{\partial}$-уравнения через граничные значения правой части. Для двойной дифференциальной формы

$$\mu(\zeta,z)=\sum\mu_{I,J}(\zeta,z)\,d\bar{z}_J\,d\bar{\zeta}_I$$

положим

$$\mu^*(\zeta,z)=\sum\mu^*_{I,J}(\zeta,z)\,d\bar{z}_I\,d\bar{\zeta}_J, \qquad \mu^*_{I,J}(\zeta,z)=\mu_{I,J}(z,\zeta).$$

Теорема 2 (основная). *Пусть D — строго псевдовыпуклая область с границей класса C^2, f — форма типа $(0, q)$, $1 \leqslant q \leqslant n-1$, $f \in C^1(\bar{D})$ и $\bar{\partial} f = 0$. Тогда существует форма $g' \in C^1(\bar{D})$ такая, что $\bar{\partial} g' = f$ в D и для $z \in \partial D$*

$$g'(z) = \int_{\partial D} f(\zeta) \wedge (A_{n,q-1} - (-1)^{b_{n,q-1}} \overset{*}{A}_{n,n-q-1}) \wedge d\zeta; \tag{6}$$

при этом

$$\| g' \|_{L^p_{1/2}(\partial D)} \leqslant K \| f \|_{L^p(\partial D)}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

Для вывода формулы (6) мы будем исходить из равенства (2):

$$U_{n,q}(\zeta, z) - \omega_{n,q}(\zeta, z) = \bar{\partial}_z A_{n,q-1}(\zeta, z) + \bar{\partial}_\zeta B_{n,q}(\zeta, z).$$

Это равенство справедливо, в частности, при $z \in D$, $\zeta \in \partial D$. Заменяя в (2) все формы на сопряженные, получаем равенство, справедливое, в частности, при $\zeta \in D$, $z \in \partial D$:

$$\overset{*}{U}_{n,q}(\zeta, z) - \overset{*}{\omega}_{n,q}(\zeta, z) = \bar{\partial}_\zeta \overset{*}{A}_{n,q-1}(\zeta, z) + \bar{\partial}_z \overset{*}{B}_{n,q}(\zeta, z).$$

Заметив, что $U_{n,q} = (-1)^{b_{n,q}} \overset{*}{U}_{n,n-q-1}$, $b_{n,q} = nq+1$, получаем для $\zeta \in D$, $z \in \partial D$, $1 \leqslant q \leqslant n$, формулу

$$U_{n,q-1} = (-1)^{b_{n,q-1}} (\overset{*}{\omega}_{n,n-q} + \bar{\partial}_\zeta \overset{*}{A}_{n,n-q-1} + \bar{\partial}_z \overset{*}{B}_{n,n-q}); \tag{7}$$

здесь $\overset{*}{A}_{n,-1} = \overset{*}{B}_{n,n-1} = \overset{*}{A}_{n,n-1} = 0$, $\overset{*}{\omega}_{n,n-q} = 0$ при $q \neq n$.

Для доказательства теоремы нам придется несколько «исправить» формулу (3). Продолжим форму $\overset{*}{B}_{n,n-q}$ по z внутрь области D так, чтобы продолженная форма принадлежала по z классу $C'(\bar{D}/\{\zeta\})$. Для этого покроем $\bar{D}$ шарами $\{U_\alpha\}$ радиуса $\varepsilon^0/4$ и пусть φ_α — разбиение единицы, соответствующее этому покрытию. Положим для $z \in D$

$$\overset{*}{B}_{n,n-q}(\zeta, z) = \sum_{r=0}^{q-2} c_r D_r^*(\zeta, z),$$

где

$$D_r^*(\zeta, z) = \sum_{\alpha,\beta} D_r^*(\zeta, z) \varphi_\alpha(\zeta) \varphi_\beta(z) + \sum_{\alpha,\beta}{}' D_r^{*\prime}(\zeta, z) \varphi_\alpha(\zeta) \varphi_\beta(z);$$

здесь первая сумма берется по (α, β) таким, что $U_\beta \cap \partial D \neq \phi$ и $\operatorname{dis}(U_\alpha, U_\beta) > \varepsilon - \varepsilon^0$; вторая сумма берется по (α, β) таким, что $U_\beta \cap \partial D \neq \phi$ и $\operatorname{dis}(U_\alpha, U_\beta) \leqslant \varepsilon - \varepsilon^0$ ($\operatorname{dis}(U_\alpha U_\beta)$ обозначает расстояние между шарами U_α и U_β). В последнем случае мы полагаем

$$D_r^{*\prime}(\zeta, z) = \frac{1}{|z - \zeta|^{2(n-r-1)} (G(z, \zeta))^{r+1}} \times \left(\frac{1}{(-3\rho(z) + F(z, \zeta))^{r+1}} - \right.$$
$$\left. - \frac{3(r+1)\rho(z)}{(-3\rho(z) + F(z, \zeta))^{r+2}} \right) \times D(\Psi_k^* \bar{z}_k - \bar{\zeta}_k \underbrace{d\bar{\zeta}_k \ldots d\bar{\zeta}_k}_{n-q \text{ раз}} \underbrace{\bar{\partial}_z \Psi_k^* \ldots \bar{\partial}_z \Psi_k^*}_{r \text{ раз}} \underbrace{d\bar{z}_k \ldots d\bar{z}_k}_{q-r-2 \text{ раз}})$$

Корректность такого продолжения вытекает из (1).

Положим теперь для $z \in \bar{D}$, $1 \leqslant q \leqslant n$

$$g'(z) = \int_{\partial D} f(\zeta) \wedge A_{n,q-1} \wedge d\zeta - \int_D f(\zeta) \wedge U_{n,q-1} \wedge d\zeta +$$
$$+ (-1)^{b_{n,q-1}} \int_{\bar{D}} f(\zeta) \wedge \bar{\partial}_z \overset{*}{B}_{n,n-q} \wedge d\zeta. \tag{8}$$

Из (3) следует, что $\bar{\partial} g' = f$, если $\bar{\partial} f = 0$. При $z \in \partial D$ мы получаем из (7) и (8) формулу (6) теоремы 2. Она позволяет доказать оценки теоремы 2.

С помощью формул (6) и (8) доказывается теорема 3, двойственная к теореме 1.

Теорема 3. *Пусть D — строго псевдовыпуклая область и пусть f — гладкая форма типа $(0, q)$, $1 \leqslant q \leqslant n$, такая, что $\bar\partial f = 0$ и $f \wedge \bar\partial \rho|_{\partial D} = 0$ при $q < n$ и f ортогональна голоморфным функциям в D при $q = n$.*

Тогда $g'(f)|_{\partial D} = 0$ и для g' имеют место оценки (4) при $q = 1$ и оценки теоремы 1 при $q > 1$.

Для доказательства того, что $g'|_{\partial D} = 0$ при $q < n$, достаточно воспользоваться тем фактом, что если $f \wedge \bar\partial\rho|_{\partial D} = 0$, то $f = \varphi_1 \bar\partial \rho + \varphi_2 \rho$, где φ_1, φ_2 — гладкие формы (см. [8, 12]) и формулой (6). Случай $q = n$ следует из формул (7), (8) (см. также [9]).

Оценки теоремы 3 хорошо известны при $q = 1$ и доказываются с помощью предложения, аналогичного лемме 1, при $q > 1$. L^2-оценки решений с компактными носителями $\bar\partial$-уравнения впервые получены в работе [10]. Двойственность между «обычным» решением $\bar\partial$-уравнения и решением уравнения $\bar\partial g = f$ с $f \wedge \bar\partial\rho|_{\partial D} = 0$ имеется уже у Кона и Росси [11].

Определим далее пространство форм типа $(0, q)$ на ∂D следующим образом [8, 11].

Пусть $L_{(0,q)}$ — пространство C^∞-форм типа $(0, q)$ в C^n и пусть $N_{(0,q)}$ — подпространство форм φ таких, что $\varphi \wedge \bar\partial\rho|_{\partial D} = 0$. Тогда пространство $M_{(0,q)}$ форм типа $(0, q)$ на ∂D определяется как фактор-пространство: $M_{(0,q)} = L_{(0,q)}/N_{(0,q)}$.

Так как $\bar\partial$-оператор во всем C^n переводит $N_{(0,q)}$ в $N_{(0,q+1)}$ (это следует непосредственно из приведенного выше равенства $f = \varphi_1 \bar\partial\rho + \varphi_2\rho$ для $f \in N_{(0,q)}$), то мы можем корректно определить на границе ∂D $\bar\partial$-оператор, переводящий $M_{(0,q)}$ в $M_{(0,q+1)}$.

Теорема 4. *Пусть D — строго псевдовыпуклая область с границей класса C^∞, $f^0 \in M_{(0,q)}$, $1 \leqslant q \leqslant n-1$, такая, что $\bar\partial f^0 = 0$ при $q < n-1$ и f^0 ортогональна на ∂D функциям, голоморфным в D, при $q = n-1$.*

Тогда существует $g^0 \in M_{(0,q-1)}$ такая, что $\bar\partial g^0 = f^0$ и

$$\|g^0\|_{L^p_{1/2}(\partial D)} \leqslant K \|f^0\|_{L^p(\partial D)}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

Заметим, что для случая $q = n-1$ условие на f^0 в формулировке теоремы 4 было рассмотрено Даутовым [9].

Интересно сопоставить наши результаты с недавно анонсированным результатом Фолланда и Штейна [13], где дан параметрикс (но не точная формула) и L^p-оценки, $1 < p < \infty$, для касательного уравнения Коши — Римана. Отметим еще, что впервые L^2-оценки для касательного уравнения Коши — Римана были получены Коном [14].

В заключение автор выражает глубокую благодарность Г. М. Хенкину за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Центральный экономико-математический институт
Академии наук СССР
Москва

Поступило
27 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Г. М. Хенкин,* Матем. сб., т. 78, № 4, 611 (1969). [2] *N. Ovrelid,* Math. Scand., v. 28, 137 (1971). [3] *W. Koppelman,* Bull. Am. Math. Soc., v. 73, № 4, 554 (1967). [4] *Г. М. Хенкин,* Матем. сб., т. 82, № 2, 300 (1970). [5] *J. Lieb,* Math. Ann., v. 190, № 1 (1970). [6] *А. В. Романов, Г. М. Хенкин,* Изв. АН СССР, сер. матем., т. 35, № 5, 1171 (1971). [7] *N. Kerzman,* Bull. Am. Math. Soc., v. 76, № 4, 860 (1970). [8] *R. Nirenberg,* Trans. Am. Math., Soc., v. 168, 337 (1972). [9] *Ш. А. Даутов,* ДАН, т. 203, № 1, 16 (1972). [10] *A. Andreotti, E. Vesentini,* Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., № 25, 81 (1965). [11] *J. J. Kohn, H. Rossi,* Ann. Math., v. 81, № 2, 451 (1965). [12] *A. Andreotti, C. O. Hill,* Ann. Scuola Norm. Sup., Pisa, v. 26, F. 11, 325 (1972). [13] *G. B. Folland, E. M. Stein,* Bull. Am. Math. Soc., v. 80, № 2, 253 (1974). [14] *J. J. Kohn,* Proc. Conf. Complex Analyses, Minneapolis, v. 113, № 1—2, 89 (1965).