

УДК 517.43

МАТЕМАТИКА

Академик АН ТаджССР А. ДЖУРАЕВ

О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ДВУМЕРНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В этой заметке нас будут интересовать собственные значения λ сингулярного интегрального уравнения

$$\omega(z) - \frac{\lambda q(z)}{\pi} \iint_G \frac{\overline{\omega(\xi)} d\xi d\eta}{(\bar{\xi} - \bar{z})^2} = 0 \quad (1)$$

в котором G — ограниченная область с границей Γ — кривой класса C_α^1 в комплексной плоскости переменной $z = x + iy$, а $q(z)$ — голоморфная функция в области $\bar{G} = G + \Gamma$.

Будем предполагать, что выполнено неравенство

$$|\lambda q(z)| \neq 1, \quad z \in \bar{G}. \quad (2)$$

В этом случае, как установлено в ⁽¹⁾, указанные собственные значения совпадают с теми значениями λ , при которых краевая задача сопряжения

$$\varphi^+(t) = \varphi^-(t) - \lambda q(t) \overline{\varphi^-(t)}, \quad \varphi(\infty) = 0 \quad (3)$$

в классе кусочно-голоморфных функций имеет нетривиальные решения.

Если $|\lambda q(t)| < 1$ при $t \in \Gamma$, то в силу (2) $|\lambda q(z)| < 1$, при $z \in \bar{G}$. В этом случае уравнение (1) в $L_p(\bar{G})$, $p > 2$, не имеет нетривиальных решений *. Таким образом, при условии (2) возможные собственные значения уравнения (1) могут лежать в тех точках λ -плоскости, которые удовлетворяют неравенству

$$|\lambda q(t)| > 1, \quad t \in \Gamma. \quad (4)$$

Условие (3), очевидно, эквивалентно уравнению

$$\varphi(z) + \frac{\lambda}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{q(t) \overline{\varphi^-(t)} dt}{t - z} = 0, \quad z \in G^-, \quad \varphi(\infty) = 0, \quad (5)$$

где G^- — дополнение области G до полной плоскости.

Если G — круг с центром в начале координат, то при любом λ из (5) следует $\varphi(z) \equiv 0$, т. е. в случае круга уравнение (1) не имеет собственных значений ни в какой области λ -плоскости, удовлетворяющей условию (2).

Л е м м а. Если G — односвязная область с гладкой границей, то собственные значения уравнения (1) при $q(z) \equiv 1$ ($|\lambda| > 1$) могут лежать лишь на дискретном множестве окружностей λ -плоскости с центром в точке $\lambda = 0$ и радиусами, большими единицы.

На самом деле, отображая внешность G^- -области G в единичный круг $|\xi| < 1$ с помощью функции

$$z = v(\xi) = \frac{c}{\xi} + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + \dots, \quad c \neq 0, \quad (6)$$

* Это следует из теоремы 2 статьи ⁽¹⁾, при условиях которой, очевидно, всегда $\lambda = 0$. Кроме того, в формулировке теоремы 3 той же статьи надо считать $|a(z)| - |b(z)| \neq 0$, $z \in \bar{G}$.

вместо (5) получим уравнение

$$\varphi(\xi) + \frac{\lambda}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} K(\tau, \xi) \overline{\varphi(\tau)} d\tau = 0, \quad |\xi| < 1, \quad (7)$$

где $\varphi(\xi) = \varphi[v(\xi)]$ — голоморфная в круге $|\xi_0| \leq 1$ функция, обращающаяся в нуль в начале координат, а

$$K(\tau, \xi) = \frac{v'(\xi)}{v(\tau) - v(\xi)} - \frac{1}{\tau - \xi} = \frac{c\bar{\tau}^2 + \xi \sum_{k=1}^{\infty} k b_k^0(\xi) \tau^{k-1}}{-c\bar{\tau} + \xi \sum_{k=1}^{\infty} b_k(\xi) \tau^{k-1}}, \quad (8)$$

$$b_k^0(\xi) = \sum_{j=k+1}^{\infty} a_j \xi^{j-k-1}, \quad b_k(\xi) = \sum_{j=k}^{\infty} a_j \xi^{j-k}.$$

Устремляя ξ к окружности, из (7) усматриваем, что граничные значения функции $\varphi(\xi)$ удовлетворяют интегральному уравнению Фредгольма типа. Уравнение (7) ценно тем, что вся информация о геометрической структуре области содержится в его ядре.

Теорема. Пусть односвязная область G такова, что ее внешность G^- можно отобразить на единичный круг с помощью функции $z = v(\xi) = c/\xi + a_1\xi + a_2\xi^2 + \dots + a_n\xi^n$.

Тогда, если $q(\xi, \tau) = \tau(\xi \sum_{k=1}^n \overline{b_k(\xi)} \tau^{n-k} - c\bar{\tau}^n) \neq 0$ при $|\xi| \leq 1, |\tau| \leq 1$, где

$b_k(\xi) = \sum_{j=k}^n a_j \xi^{j-k}$, то уравнение (1) не имеет собственных значений; если же при $|\tau| \leq 1$ полином $q(\xi, \tau)$ имеет лишь простые корни $\alpha_1(\xi), \alpha_2(\xi), \dots, \alpha_l(\xi)$, $l \leq n+1$, корни этого полинома, расположенные внутри круга $|\tau| < 1$: $|\alpha_j(\xi)| < 1$ при $|\xi| < 1$, то собственные значения и собственные функции уравнения (1) удовлетворяют относительно голоморфной функции $\varphi(\xi)$ функциональному уравнению вида

$$\varphi(\xi) + \lambda \sum_{k=1}^l \overline{A_k(\xi)} \cdot \overline{\varphi[\alpha_k(\xi)]} = 0, \quad |\xi| < 1, \quad |\alpha_k(\xi)| < 1. \quad (*)$$

Действительно, в этом случае в силу леммы указанные собственные значения будут удовлетворять следующему уравнению:

$$\varphi(\xi) + \lambda \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=1} \frac{p(\xi, \tau)}{q(\xi, \tau)} \varphi(\tau) d\tau = 0, \quad (9)$$

$$p(\xi, \tau) = c\bar{\tau}^n + \sum_{k=1}^{n-1} k b_k^0(\xi) \tau^{n-1-k}, \quad b_k^0(\xi) = \xi \sum_{j=k+1}^n a_j \xi^{j-k-1}.$$

Если $q(\xi, \tau) \neq 0$ при $|\xi| \leq 1, |\tau| \leq 1$, то из (9) следует $\varphi(\xi) \equiv 0$.

Если предположить, что при $|\tau| \leq 1$ полином $q(\xi, \tau)$ не имеет кратных корней, то $q(\xi, \tau) = \tau \prod_{j=1}^l (\tau - \alpha_j(\xi)) q_{n+1-l}(\xi, \tau)$, где $q_{n+1-l}(\xi, \tau) \neq 0$ при $|\xi| \leq 1, |\tau| \leq 1$, и, применяя теорему о вычетах, из (9) получим функциональное уравнение (*), где

$$A_k(\xi) = \frac{p(\xi, \alpha_k(\xi))}{\prod_{\substack{j=1 \\ (j \neq k)}}^l (\alpha_k(\xi) - \alpha_j(\xi)) \cdot q_{n+1-l}(\xi, \alpha_k(\xi))}.$$

Следствие. Если G — внутренность эллипса $x^2/(1+\varepsilon)^2 + y^2/(1-\varepsilon)^2 = 1$, $0 < \varepsilon < 1$, то все собственные значения $(|\lambda| > 1)$ уравнения

$$\omega(z) - \frac{\lambda}{\pi} \iint_G \frac{\overline{\omega(\xi)} d\xi d\eta}{(\xi - \bar{z})^2} = 0 \quad (10)$$

расположены на окружностях $|\lambda| = \varepsilon^{-k}$, $k=1, 2, \dots$

Действительно, в этом случае функция $v(\xi) = 1/\xi + \varepsilon \xi$ отображает внешность этого эллипса в круг $|\xi| < 1$. В данном случае $c=1$, $a_1=\varepsilon$, $a_k=0$ при $k>1$, $p(\xi, \tau) \equiv \tau$, $q(\xi, \tau) = \tau(\varepsilon \bar{\xi} - \tau)$, $\alpha_1(\xi) = \varepsilon \bar{\xi}$ и, следовательно, эти собственные значения находятся из функционального уравнения

$$\varphi(\xi) + \lambda \overline{\varphi(\varepsilon \bar{\xi})} = 0, \quad \varphi(0) = 0. \quad (11)$$

Представив голоморфную в круге $|\xi| \leq 1$ функцию $\varphi(\xi)$ в виде ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi^k$, из (11) будем иметь $a_k + \lambda \varepsilon^k \bar{a}_k = 0$, $k=1, 2, \dots$. Отсюда следует, что уравнение (11) имеет нетривиальные голоморфные решения при $|\lambda| = \varepsilon^{-k}$, $k=1, 2, \dots$

Теорема. Пусть G — круговое кольцо $0 < r < |\xi| < R$, а $q(z) \equiv z^m$, где m — целое число.

Тогда, если $m \geq 0$, то все собственные значения уравнения (1), удовлетворяющие условию $|\lambda| > r^{-m}$, расположены на окружностях $|\lambda| = R^{-m}(R/r)^k$, $k=m+1, m+2, \dots$. Если же $m < 0$, то все собственные значения уравнения (1), удовлетворяющие условию $|\lambda| > R^{-m}$, расположены на окружностях $|\lambda| = r^{-m}(R/r)^k$, $k=-m+1, -m+2, \dots$

Действительно, при $m \geq 0$ по теореме о вычетах получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} \frac{t^m \overline{\varphi^-(t)} dt}{t-z} &= \frac{r^{2m+2}}{2\pi i} \int_{|t|=r} \frac{\overline{\varphi^-(t)} dt}{t^{m+1}(t-r^2/\bar{z})} = \\ &= \begin{cases} \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{(m-k)!} r^{2(m-k)} \overline{\varphi^{(m-k)}(0)}, & |z| < r, \\ z^m \overline{\varphi\left(\frac{r^2}{\bar{z}}\right)} + \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{(m-k)!} r^{2(m-k)} \overline{\varphi^{(m-k)}(0)}, & |z| > R; \end{cases} \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R} \frac{t^m \overline{\varphi^-(t)} dt}{t-z} &= \begin{cases} z^m \overline{\varphi\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)}, & |z| < r, \\ 0, & |z| > R, \end{cases} \end{aligned}$$

а при $m = -m' < 0$ по той же теореме получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} \frac{t^m \overline{\varphi^-(t)} dt}{t-z} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=r} \frac{\overline{\varphi^-(t)} dt}{t^{m'}(t-z)} = \begin{cases} 0, & |z| < r, \\ \frac{1}{r^{m'}} \overline{\varphi\left(\frac{r^2}{\bar{z}}\right)}, & |z| > R, \end{cases} \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R} \frac{t^m \overline{\varphi^-(t)} dt}{t-z} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R} \frac{\chi^+(t) dt}{t^{m'}(t-z)} = \\ &= \begin{cases} z^m \chi(z) + \sum_{k=0}^{m'} \frac{(-1)^k}{(m'-1-k)!} \frac{\chi^{(m'-1-k)}(0)}{z^{k+1}}, & |z| < r, \\ \sum_{k=0}^{m'} \frac{(-1)^k}{(m'-1-k)!} \frac{\chi^{(m'-1-k)}(0)}{z^{k+1}} & |z| > R, \end{cases} \end{aligned}$$

где $\chi(z) = \overline{\varphi(R^2/\bar{z})}$, $|z| < R$.

Поэтому уравнение (5), если учесть, что интеграл по контуру Γ равен сумме интегралов по окружностям $|t|=r$, $|t|=R$, эквивалентно функциональному уравнению при $m \geq 0$:

$$\varphi(z) + \lambda \left(z^m \overline{\varphi\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)} + \sum_{k=0}^m \beta_k z^k \right) = 0, \quad |z| < r, \quad (12)$$

$$\varphi(z) + \lambda \left(z^m \overline{\varphi\left(\frac{r^2}{\bar{z}}\right)} + \sum_{k=0}^m \bar{\beta}_k z^k \right) = 0, \quad |z| > R;$$

$$\beta_k = \frac{(-1)^k}{(m-k)!} \varphi^{(m-k)}(0) \cdot r^{2(m-k)}, \quad \varphi^{(j)}(0) = \frac{d^j \varphi}{dz^j} \Big|_{z=0},$$

а при $m < 0$ функциональному уравнению

$$\varphi(z) + \lambda \left(z^m \overline{\varphi\left(\frac{R^2}{\bar{z}}\right)} + \sum_{k=0}^{-m-1} \frac{\gamma_k}{z^{k+1}} \right), \quad |z| < r, \quad (13)$$

$$\varphi(z) + \lambda \left(z^m \overline{\varphi\left(\frac{r^2}{\bar{z}}\right)} + \sum_{k=0}^{-m-1} \frac{\gamma_k}{z^{k+1}} \right), \quad |z| > R;$$

$$\gamma_k = \frac{(-1)^k}{(-m-1-k)!} \chi^{(-m-1-k)}(0).$$

Представляя теперь голоморфную функцию $\varphi(z)$ в виде ряда

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad \text{при } |z| < r, \quad \varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{z^k} \quad \text{при } |z| > R \quad (14)$$

и принимая во внимание, что $|\lambda| > r^{-m}$ при $m \geq 0$ с учетом равенства $a_k = k! \varphi^{(k)}(0)$, $k=0, 1, 2, \dots$, из функционального уравнения (12) получим $a_k=0$, $k=1, 2, \dots, m$; $a_k + \lambda R^{2(m-k)} \bar{b}_{k-m} = 0$, $b_{k-m} + \lambda r^{2k} \bar{a}_k = 0$, $k=m+1, m+2, \dots$. Если же $m < 0$, то, используя разложение (14) и учитывая, что $|\lambda| > R^{-m}$, с учетом равенства $\chi^{(h)}(0) = K! R^{-2h} \bar{b}_h$, $h=1, 2, \dots, -m$, из функционального уравнения (13), получим $b_k=0$, $k=1, 2, \dots, -m$; $b_k + \lambda r^{2(k+m)} \bar{a}_{k+m} = 0$, $a_{k+m} + \lambda R^{-2k} \bar{b}_k = 0$, $k=-m+1, -m+2, \dots$

Из полученных равенств следует утверждение теоремы.

З а м е ч а н и е. Уравнение

$$\omega(z) - \frac{\bar{\lambda}}{\pi} \iint_G \frac{\overline{q(\xi)} \overline{\omega(\xi)}}{(\xi-z)^2} d\xi d\eta = 0$$

имеет равный нулю индекс и является сопряженным к уравнению (1), а потому все предыдущие результаты справедливы и для этого уравнения. В частности, отсюда получаем утверждение о наличии нетривиальных собственных значений у последнего уравнения при $q=1$, отмеченное в работе М. Шиффера (⁽²⁾, стр. 213) и играющее важную роль в экстремальных проблемах конформных отображений.

Математический институт с Вычислительным центром
Академии наук ТаджССР
Душанбе

Поступило
22 III 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. Джураев, ДАН, т. 197, № 6, 1251 (1974). ² М. Шиффер, В кн. Международный математический конгресс в Эдинбурге, М., 1962, стр. 193.