

Ю. А. ДУБИНСКИЙ

**О НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ
БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА И НЕТРИВИАЛЬНОСТИ
СООТВЕТСТВУЮЩИХ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА**

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 23 XII 1974)

В работе изучается задача Дирихле для нелинейного эллиптического уравнения бесконечного порядка

$$L(u) \equiv \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} (-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} A_{\alpha}(x, D^{\omega} u) = h(x), \quad |\gamma| \leq |\alpha|, \quad x \in G; \quad (1)$$

$$D^{\omega} u|_{\Gamma} = 0, \quad |\omega| = 0, 1, \dots, \quad (2)$$

где $A_{\alpha}(x, \xi_{\gamma})$ — нелинейные функции степенного роста по ξ_{γ} (напомним, что $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ — мультииндекс дифференцирования, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $D^{\alpha} \equiv \partial^{|\alpha|} / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}$; $G \subset \mathbb{R}^n$ — область с конечной мерой, Γ — граница G ; $u(x)$ — вещественные или комплекснозначные функции.

При рассмотрении задачи (1), (2) возникает прежде всего вопрос о нетривиальности классов финитных функций типа пространств Соболева бесконечного порядка

$$\dot{W}^{\infty}\{a_{\alpha}, p_{\alpha}\} = \left\{ u(x) \in C_0^{\infty}(G) : \rho(u) \equiv \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_{\alpha} \|D^{\alpha} u\|_{r_{\alpha}}^{p_{\alpha}} < \infty \right\},$$

где $\|u\|_{r_{\alpha}}$ — норма в $L_{r_{\alpha}}(G)$, $a_{\alpha} \geq 0$, $p_{\alpha} \geq 1$, $r_{\alpha} \geq 1$ — произвольные числовые последовательности (случай $r_{\alpha} = \infty$ также допустим) *. В соответствии с этим в п. 1 устанавливаются необходимые и достаточные условия нетривиальности $\dot{W}^{\infty}\{a_{\alpha}, p_{\alpha}\}$; в п. 2 доказывается однозначная разрешимость задачи (1), (2); в п. 3 получена оценка «нормы» обратного оператора L^{-1} .

1. Критерий нетривиальности $\dot{W}^{\infty}\{a_{\alpha}, p_{\alpha}\}$. По определению класс $\dot{W}^{\infty}\{a_{\alpha}, p_{\alpha}\}$ нетривиален, если существует функция $u(x) \in C_0^{\infty}(G)$, $u(x) \neq 0$, имеющая конечный «интеграл» $\rho(u)$. Обозначим через M_N , $N = 0, 1, \dots$, числа, определенные соотношением

$$\sum_{|\alpha|=N} a_{\alpha} M_N^{p_{\alpha}} = 1, \quad M_N > 0,$$

полагая $M_N = +\infty$, если все $a_{\alpha} = 0$, $|\alpha| = N$.

Теорема 1. Класс $\dot{W}^{\infty}\{a_{\alpha}, p_{\alpha}\}$ нетривиален тогда и только тогда, когда последовательность M_N порождает неквазианалитический класс функций одного вещественного переменного.

Наметим доказательство теоремы. **Необходимость.** Пусть $\{M_N\}$ порождает квазианалитический класс $C\{M_N\}$ ** и $u(x) \in \dot{W}^{\infty}\{a_{\alpha}, p_{\alpha}\}$. Имеем, очевидно, неравенство

$$|\xi|^{\alpha} |\tilde{u}(\xi)| \leq K \|D^{\alpha} u\|_{r_{\alpha}} \quad \forall \alpha, \quad (3)$$

* Как будет видно ниже, зависимость классов от r_{α} несущественна, поэтому числа r_{α} отсутствуют в обозначении класса; говоря о включении $u(x) \in C_0^{\infty}(G)$, мы имеем в виду, что $D^{\omega} u|_{\Gamma} = 0$ для всех $|\omega| \geq 0$.

** Относительно квазианалитичности функций одного переменного см., например, (1).

где $\tilde{u}(\xi)$ — преобразование Фурье $u(x)$, $K > 0$ зависит от $\text{mes } G$. Положим $\xi = \eta\theta$, $\eta \in \mathbb{R}^1$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, $|\theta_j| \geq 1$, $j=1, \dots, n$. Тогда при $|\alpha| = N \geq 2$, учитывая финитность $u(x)$, получим из (3) неравенство

$$|\eta|^{N-2} (1 + \eta^2) |\tilde{u}(\eta\theta)| \leq K \|D^\alpha u\|_{r_\alpha},$$

откуда

$$\sum_{|\alpha|=N} a_\alpha [(1 + \eta^2) |\eta|^{N-2} |\tilde{u}(\eta\theta)| K^{-1}]^{p_\alpha} \leq \sum_{|\alpha|=N} a_\alpha \|D^\alpha u\|_{r_\alpha}^{p_\alpha} \leq 1,$$

если $N \geq 2$ достаточно велико. Следовательно,

$$(1 + \eta^2) |\eta|^{N-2} |\tilde{u}(\eta\theta)| \leq K M_N, \quad N=2, 3, \dots \quad (4)$$

Положим, далее, $v(y) = F_{\eta \rightarrow y}^{-1} \tilde{u}(\eta\theta)$ — обратное преобразование Фурье $u(\eta\theta)$ как функции переменного $\eta \in \mathbb{R}^1$; очевидно, $v(y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$. В силу (4) $|D^N v(y)| \leq K M_{N+2}$, т. е. $v(y) \in C\{M_{N+2}\}$. Значит, $v(y) \equiv 0$, откуда и $u(x) \equiv 0$, ибо числа θ_j , $|\theta_j| \geq 1$, $j=1, \dots, n$, произвольны.

Достаточность. Пусть $\{M_N\}$ определяет неквазианалитический класс функций одного переменного. Тогда существует нетривиальная финитная функция $u(r)$, $r \in \mathbb{R}^1$, с наперед заданным носителем такая, что

$$|D^N u(r)| \leq K q^N M_N^c,$$

где $K > 0$, $0 < q < 1$, M_N^c — выпуклая регуляризация последовательности M_N посредством логарифмов $(^1, ^2)$. Положив $x^0 \in G$, $u(x) = u(x_1 - x_1^0) \dots u(x_n - x_n^0)$, находим, что $\|D^\alpha u\|_{r_\alpha} \leq K q^N M_{\alpha_1}^c \dots M_{\alpha_n}^c \leq K q^N M_N^c \leq q_0^N M_N^c$, где $q < q_0 < 1$, N достаточно велико. Отсюда, учитывая неравенство $M_N^c \leq M_N$ и определение чисел M_N , получаем

$$\rho(u) \leq K \sum_{N=0}^{\infty} \left(\sum_{|\alpha|=N} a_\alpha M_N^{p_\alpha} q_0^{N p_\alpha} \right) \leq K \sum_{N=0}^{\infty} q_0^N \left(\sum_{|\alpha|=N} a_\alpha M_N^{p_\alpha} \right) = K \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} q_0^N < \infty,$$

т. е. $u(x) \in \dot{W}^\infty\{a_\alpha, p_\alpha\}$.

Теорема доказана.

2. Разрешимость задачи Дирхле. Допустим, что функции $A_\alpha(x, \xi_\gamma)$ непрерывны при $x \in G$ и всех ξ_γ и удовлетворяют условиям:

а) $|\sum_{|\alpha|=N} A_\alpha(x, \xi_\gamma) \eta_\alpha| \leq K (\sum_{|\alpha|=N} a_\alpha |\xi_\alpha|^{p_\alpha-1} |\eta_\alpha| + b_N)$, где $K > 0$, $a_\alpha \geq 0$, $p_\alpha > 1$, $b_N > 0$ — постоянные, причем последовательность p_α ограничена, а $b_1 + b_2 + \dots < \infty$;

б) $\text{Re} \sum_{|\alpha|=N} A_\alpha(x, \xi_\gamma) \bar{\xi}_\alpha \geq \delta \sum_{|\alpha|=N} a_\alpha |\xi_\alpha|^{p_\alpha} - \delta_N$, $\delta > 0$, $\delta_N > 0$, причем $\delta_1 + \delta_2 + \dots < \infty$;

в) $\text{Re} \sum_{|\alpha|=N} [A_\alpha(x, \xi_\gamma) - A_\alpha(x, \eta_\gamma)] (\bar{\xi}_\alpha - \bar{\eta}_\alpha) \geq 0$, причем равенство нулю имеет место тогда и только тогда, когда $\xi_\alpha \equiv \eta_\alpha$.

Кроме того, предположим, что число $a_\alpha \geq 0$, $p_\alpha > 1$ таковы, что пространство $\dot{W}\{a_\alpha, p_\alpha\}$ нетривиально. Далее, $W^{-\infty}\{a_\alpha, p_\alpha\} = \{h(x) : h(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha D^\alpha h_\alpha(x)\}$, где $h_\alpha(x) \in L_{p'_\alpha}(G)$, $p'_\alpha = (p_\alpha - 1)/p_\alpha$, причем

$$\rho'(h) \equiv \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha \|h_\alpha(x)\|_{p'_\alpha}^{p'_\alpha} < \infty. \quad (5)$$

Двойственность пары $(W^{-\infty}, \dot{W}^\infty)$ постулируется равенством

$$\langle h, v \rangle = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha \int_G h_\alpha(x) D^\alpha v(x) dx,$$

которое в силу (5) определено корректно. Очевидно, $L(u): \dot{W}^\infty\{a_\alpha, p_\alpha\} \rightarrow W^{-\infty}\{a_\alpha, p_\alpha'\}$.

Определение. Функция $u(x) \in \dot{W}^\infty\{a_\alpha, p_\alpha\}$ называется решением задачи (1), (2), если для любой функции $v(x) \in \dot{W}^\infty\{a_\alpha, p_\alpha\}$ справедливо равенство $\langle L(u), v \rangle = \langle h, v \rangle$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия а)–в). Тогда для любой правой части $h(x) \in W^{-\infty}\{a_\alpha, p_\alpha'\}$ существует единственное решение $u(x) \in \dot{W}^\infty\{a_\alpha, p_\alpha\}$ задачи (1), (2).

Для доказательства рассмотрим «усеченную» задачу

$$L_s(u_s) \equiv \sum_{|\alpha|=0}^s (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, D^\omega u_s) = h_s(x), \quad (6)$$

$$D^\omega u_s|_{\Gamma} = 0, \quad |\omega| \leq s-1, \quad (7)$$

где $h_s(x) = \sum_{|\alpha|=0}^s (-1)^{|\alpha|} D^\alpha h_\alpha(x)$. Разрешимость задачи (6), (7) вытекает из теории монотонных операторов (см., например, (3-5) и др.). При этом справедлива оценка

$$\sum_{|\alpha|=0}^s a_\alpha \|D^\alpha u_s\|_{p_\alpha}^{p_\alpha} \leq K \rho'(h), \quad K > 0.$$

Отсюда следует, что последовательность u_s (говоря априори, подпоследовательность) сходится равномерно со всеми производными к некоторой функции $u(x) \in \dot{W}^\infty\{a_\alpha, p_\alpha\}$. Эта функция и является искомым решением (отметим, что при обосновании предельного перехода при $s \rightarrow \infty$ существенно используется ограниченность последовательности p_α). Единственность решения немедленно вытекает из условия в).

3. Непрерывность обратного оператора. Допустим, что выполнены условия а), б) и, кроме того, функции $A_\alpha(x, \xi_\nu)$ дифференцируемы по ξ_ν , быть может, исключая значения $\xi_\nu = 0$, причем

$$\operatorname{Re} \sum_{|\alpha|=N, |\beta| \leq N} A_{\alpha\beta}(x, \xi_\nu) \eta_\beta \bar{\eta}_\alpha \geq \delta \sum_{|\alpha|=N} (p_\alpha - 1) a_\alpha |\xi_\alpha|^{p_\alpha-2} |\eta_\alpha|^2, \quad (8)$$

где $\delta > 0$ — постоянная, $A_{\alpha\beta}(x, \xi_\nu) \equiv \partial A_\alpha(x, \xi_\nu) / \partial \xi_\beta$.

Теорема 3. Пусть выполнено условие (8). Тогда для любых функций $u(x) \in \dot{W}^\infty\{a_\alpha, p_\alpha\}$, $v(x) \in \dot{W}^\infty\{a_\alpha, p_\alpha\}$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=0}^\infty a_\alpha \left(\int_{G_{+, \alpha}} |D^\alpha(u-v)|^{p_\alpha} dx + \frac{p_\alpha-1}{2^{p_\alpha-1}} \int_{G_{-, \alpha}} |D^\alpha(u+v)|^{p_\alpha-2} |D^\alpha(u-v)|^2 dx \right) \leq \\ \leq K \langle L(u) - L(v), u-v \rangle, \end{aligned} \quad (*)$$

где $1 < p_\alpha < 2$, $G_{+, \alpha} = \{x \in G: |D^\alpha(u+v)| \leq |D^\alpha(u-v)|\}$, $G_{-, \alpha} = G \setminus G_{+, \alpha}$; $K > 0$ — постоянная;

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=0}^\infty a_\alpha \left(\frac{1}{2^{p_\alpha-2}} \int_{G_{+, \alpha}} |D^\alpha(u-v)|^{p_\alpha} dx + 2 \int_{G_{-, \alpha}} |D^\alpha(u+v)|^{p_\alpha-2} |D^\alpha(u-v)|^2 dx \right) \leq \\ \leq K \langle L(u) - L(v), u-v \rangle, \end{aligned} \quad (**)$$

где $p_\alpha \geq 2$, $K > 0$ — постоянная; $G_{+, \alpha}$, $G_{-, \alpha}$ те же, что и в неравенстве (*).

Доказательство. В силу (8) имеем для любого $s \geq 0$

$$\begin{aligned} \langle L_s(u) - L_s(v), u - v \rangle &= \sum_{|\alpha|=0} \langle A_\alpha(x, D^\gamma u) - A_\alpha(x, D^\gamma v), D^\alpha(u-v) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{|\alpha| \rightarrow 0} \left\langle \int \sum_{-1 \leq |\beta| \leq |\alpha|} A_{\alpha\beta} \left(x, \frac{D^\gamma(u+v)}{2} + \tau \frac{D^\gamma(u-v)}{2} \right) d\tau D^\beta(u-v), D^\alpha(u-v) \right\rangle \geq \\ &\geq \frac{\delta}{2} \sum_{|\alpha|=0}^s \frac{(p_\alpha-1)a_\alpha}{2^{p_\alpha-2}} \left\langle \int_{-1}^1 |q_\alpha + \tau|^{p_\alpha-2} d\tau |D^\alpha(u-v)|^{p_\alpha-1}, |D^\alpha(u-v)| \right\rangle, \end{aligned} \quad (9)$$

где $q_\alpha = |D^\alpha(u+v)| / |D^\alpha(u-v)|$. Вычисления показывают, что при $1 < p < 2$

$$\int_{-1}^1 |q + \tau|^{p-2} d\tau = \begin{cases} \frac{2^{p-1}}{p-1}, & \text{если } |q| \leq 1; \\ 2|q|^{p-2}, & \text{если } |q| > 1, \end{cases}$$

а при $p \geq 2$

$$\int_{-1}^1 |q + \tau|^{p-2} d\tau \geq \begin{cases} \frac{2}{p-1}, & \text{если } |q| \leq 1; \\ \frac{2^p}{p-1} |q|^{p-2}, & \text{если } |q| > 1. \end{cases}$$

Учитывая эти неравенства, из (9) при $s \rightarrow \infty$ получаем искомые неравенства.

С л е д с т в и е. Если $p_\alpha \geq 2$, то справедливо неравенство

$$\rho \left(\frac{u-v}{2} \right) \leq K \rho' (L(u) - L(v)),$$

где $K > 0$ — постоянная.

Пр и м е р. Пусть $L(u) = \sum_{|\alpha|=0}^\infty a_\alpha (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (|D^\alpha u|^{p_\alpha-2} D^\alpha u)$, где $a_\alpha \geq 0$, $1 < p_\alpha \leq \bar{p} < \infty$ таковы, что класс $\dot{W}\{a_\alpha, p_\alpha\}$ нетривиален. Все условия теорем 2,3 выполнены.

К о н т р п р и м е р. Пусть $L(u) = \exp(-\Delta)u(x)$ или $L(u) = [\cos i\Delta]u(x)$. Нетрудно проверить, что соответствующие пространства $\dot{W}^\infty\{\cdot, 2\} = \dot{p}$, и, следовательно, уравнения

$$\exp(-\Delta)u(x) = h(x), \quad [\cos i\Delta]u(x) = h(x)$$

сводятся к тривиальности $0 = 0$.

Московский энергетический институт

Поступило
28 XI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Мандельброт, Примающиеся ряды. Регуляризация последовательностей. Применения, М., 1955. ² Ю. А. Дубинский, Дифференциальные уравнения, т. 10, № 2 (1974). ³ J. Minty, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., v. 50, 1038 (1963). ⁴ F. E. Browder, Bull. Am. Math. Soc., v. 69, 862 (1963). ⁵ J. Leray, J. Lions, Bull. Soc. Math. France, v. 93, 97 (1965). ⁶ Ю. А. Дубинский, УМН, т. 23, № 1, 45 (1968). ⁷ Р. И. Качуровский, Там же, № 2, 121 (1968). ⁸ Ж.-Л. Лионс, Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, М., «Мир», 1972. ⁹ М. М. Вайнберг, Вариационный метод и метод монотонных операторов, М., «Наука», 1972.