

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

В. Я. ИВРИЙ

КОРРЕКТНОСТЬ В ПРОЕКТИВНЫХ КЛАССАХ ЖЕВРЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ НЕСТРОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 30 X 1974)

В работах ⁽¹⁻³⁾ исследовалась корректность в индуктивных классах Жевре $\gamma^{(\kappa)}$ нехарактеристической задачи Коши для нестроого гиперболических операторов. В настоящей заметке мы укажем аналогичные результаты для корректности в проективных классах Жевре $\gamma^{(\kappa)}$. Пример, приводимый в конце заметки, показывает неэквивалентность этих видов корректности.

Введем обозначения:

$$x = (x_0, x') = (x_0, x_1, \dots, x_l) \in R^{l+1},$$

Ω — открытая область в R^{l+1} ,

$$G = \{x \in \Omega, T_- \leq x_0 \leq T_+\}, \quad -\infty \leq T_- < T_+ \leq +\infty,$$

G^- — замыкание G ,

$$G_t = \{x \in G, x_0 = t\}, \quad G_t^+ = \{x \in G, x_0 \geq t\}, \\ G_t^- = \{x \in G, x_0 \leq t\}, \quad \Gamma_{\pm} = \Omega_{T_{\pm}}, \quad \bar{G} = G \setminus (\Gamma_+ \cup \Gamma_-).$$

Через $\gamma_{\text{loc}}^{n(\kappa)}(G)$, где $n=0, 1, \dots, \infty$, $1 < \kappa < \infty$, обозначим класс функций и таких, что для любого компакта $K \subset \subset G$ и любого $R > 0$ существует C такое, что для всех α , $\alpha_0 \leq n$,

$$\sup_{x \in K} |D^\alpha u(x)| \leq CR^{|\alpha|} |\alpha|^{|\alpha|\kappa},$$

$$\gamma_0^{n(\kappa)}(G) = \gamma_{\text{loc}}^{n(\kappa)}(G) \cap C_0(G).$$

Пусть

$$P \equiv P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad P_s(x, \xi) = \sum_{|\alpha| = s} a_\alpha(x) \xi^\alpha,$$

$$P_{s,\beta}^{(\alpha)}(x, \xi) = (\partial/\partial x)^\beta (\partial/\partial \xi)^\alpha P_s(x, \xi).$$

Будем предполагать, что $P_m(x, (1, 0, \dots, 0))$ нигде в Ω в нуль не обращается. Будем предполагать также, что $a_\alpha(x)$ аналитичны в Ω , однако теоремы 6, 7 можно доказать и при более общих предположениях.

О п р е д е л е н и е 1. Рассмотрим задачу Коши в слабой форме:

$$Pu = f \quad \text{в} \quad \Omega_{T_+}^-; \tag{1_w}$$

$$\text{supp } u \subset \bar{\Omega}_T^+. \tag{2_w}$$

Назовем ее слабо $\gamma^{(\kappa)}$ -корректной, если для любой $f \in \gamma_0^{\infty(\kappa)}(\Omega_T^+)$ существует $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, удовлетворяющая (1_w), (2_w).

Определение 2. Рассмотрим задачу Коши в сильной форме:

$$Pu=f \quad \text{в} \quad G_T^+; \quad (1_s)$$

$$D_0^j u|_{G_T}=g_j, \quad j=0, \dots, m-1. \quad (2_s)$$

Назовем ее сильно $\gamma^{n(\kappa)}$ -корректной, если для любых $f \in \gamma_{\text{loc}}^{n(\kappa)}(G_T^-)$,

$g_j \in \gamma_{\text{loc}}^{(\kappa)}(G_T)$, $j=0, \dots, m-1$, существует $u \in \gamma_{\text{loc}}^{m+n(\kappa)}(G_T^+)$, удовлетворяющая (1_s), (2_s).

Определение 3. Задачу Коши (1_w), (2_w) назовем слабо $\gamma^{(\kappa)}$ -регулярной, если она слабо $\gamma^{(\kappa)}$ -корректна для оператора $P+Q$ при любом Q -операторе порядка не выше $m-1$ с аналитическими коэффициентами.

Аналогично вводится понятие сильной $\gamma^{n(\kappa)}$ -регулярности задачи Коши.

Из теорем 1, 2 работы (2) и теорем 1, 2 работы (3) легко вытекают следующие необходимые условия $\gamma^{n(\kappa)}$ -корректности:

Теорема 1. Если задача Коши (1_w), (2_w) слабо $\gamma^{(\kappa)}$ -корректна при любом $T \in [T_-, T_+]$, то P гиперболичен относительно x_0 в G , т. е. все корни ξ_0 характеристического уравнения

$$P_m(x, \xi_0, \xi') = 0 \quad (3)$$

вещественны при $x \in G$, $\xi' \in R^l$.

Теорема 2. Пусть $\varphi(x)$ — вещественная аналитическая фаза кратности r в окрестности $\hat{x} \in \hat{G}$.

Тогда, если задача Коши (1_w), (2_w) слабо $\gamma^{(\kappa)}$ -корректна при любом $T \in [T_-, T_+]$, то выполнено условие:

(L _{κ} ^{loc}) Для всех вещественных $\psi \in C^\infty(\hat{G})$ и всех $h \in C_0^\infty(G)$, носитель которых содержится в достаточно малой окрестности $\hat{x}$

$$P(e^{i\varphi + i\psi \rho^{1/\kappa}} h) = O(p^{m-r(1-1/\kappa)})$$

при вещественном $\rho \rightarrow +\infty$.

Заметим, что (L _{κ} ^{loc}) — это также необходимое условие локальной $\gamma^{(\kappa)}$ -корректности из работы (2).

Теорема 3. Пусть $\hat{x} \in G$, $\hat{\xi} = (0, \dots, 0, 1)$, $p = (p_0, \dots, p_l)$, $1 > p_k \geq 0$ для всех k . Предположим, что

$$P_{m,\beta}^{(\alpha)}(\hat{x}, \hat{\xi}) = 0, \quad (4)$$

как только $|\alpha| + \langle \beta - \alpha, p \rangle < r(1 - p_0)$, где $\langle \gamma, p \rangle = \gamma_0 p_0 + \dots + \gamma_l p_l$, и

$$((\partial/\partial \xi_0)^r P_m)(\hat{x}, \hat{\xi}) \neq 0.$$

Тогда, если задача Коши (1_w), (2_w) слабо $\gamma^{(\kappa)}$ -корректна при любом $T \in [T_-, T_+]$, то

$$P_{s,\beta}^{(\alpha)}(\hat{x}, \hat{\xi}) = 0,$$

как только $|\alpha| + \langle \beta - \alpha, p \rangle < r(1 - p_0) - (m - s)\kappa/(\kappa - 1)$.

Из теоремы 3 вытекает ряд следствий, аналогичных следствиям работы (3); вывести их мы предоставляем читателю.

Теорема 4. Пусть $\hat{x} \in G$, $\hat{\xi} = (0, \dots, 0, 1)$, $p = (p_0, \dots, p_l)$, $1 > p_k \geq 0$ для всех k . Предположим, что (4) выполнено, как только $|\alpha| + \langle \beta - \alpha, p \rangle < q$.

Тогда, если задача Коши (1_w), (2_w) слабо $\gamma^{(\kappa)}$ -регулярна при любом $T \in [T_-, T_+]$, то $q \leq \kappa/(\kappa - 1)$.

Следующее утверждение имеет самостоятельный характер и не вытекает из работ (2, 3).

Теорема 5. Пусть $\hat{x} \in G$, $\hat{\xi} = (0, \dots, 0, 1)$, $p = (p_0, \dots, p_l)$, $1 > p_k \geq 0$ для всех k . Предположим, что (4) выполнено, как только $|\alpha| + \langle \beta - \alpha, p \rangle \leq q$, кроме случая $\alpha = \beta = (q, 0, \dots, 0)$, когда оно нарушено.

Тогда, если задача Коши $(1_w), (2_w)$ слабо регулярна при любом $T \in [T_-, T_+)$, то $q < \kappa/(\kappa-1)$. Если же $q \geq \kappa/(\kappa-1)$, то для того, чтобы задача Коши $(1_w), (2_w)$ была слабо $\gamma^{(\kappa)}$ -корректной при любом $T \in [T_-, T_+)$, необходимо, чтобы

$$P_{m-1}(\hat{x}, \hat{\xi}) = 0.$$

Модифицируя доказательство теоремы из ⁽¹⁾ и теоремы 3 из ⁽²⁾, можно доказать следующие утверждения о достаточных условиях $\gamma^{(\kappa)}$ -корректности.

Теорема 6. Пусть P гиперболичесен в G относительно x_0 и G — линза пространственного типа. Пусть при $x \in G$, $\xi' \in R^1 \setminus \{0\}$ кратность корней уравнения (3) не превосходит $r \geq 2$. Тогда, если $\kappa \leq (2r-2)/(2r-3)$, то при любом $T \in [T_-, T_+)$ задача Коши $(1_s), (2_s)$ сильно $\gamma^{n(\kappa)}$ -корректна; $n = 0, 1, \dots, \infty$.

З а м е ч а н и е. Аналог теоремы 6 имеет место и для матричных дифференциальных операторов.

Теорема 7. Пусть P — гиперболический относительно x_0 в G оператор с характеристическими корнями постоянной кратности и G — линза пространственного типа.

Тогда, если для всех $\hat{x} \in \dot{G}$ и всех вещественных аналитических фаз φ в окрестности $\hat{x}$ условие $(L_{\hat{x}}^{loc})$ выполнено, то задача Коши $(1_s), (2_s)$ сильно $\gamma^{n(\kappa)}$ -корректна при любом $T \in [T_-, T_+)$; $n = 0, 1, \dots, \infty$.

П р и м е р. Рассмотрим оператор

$$P = D_0^2 - x_0^{2\mu} D_1^2 + a x_0^\nu D_1, \quad \nu < \mu - 1,$$

где $2\mu, \nu$ — неотрицательные целые числа, $a \neq 0$. Пусть $G = \{x \in R^2, x_0 \geq 0\}$, $T = 0$.

Если задача Коши $(1_w), (2_w)$ для P слабо локально $\gamma^{(\kappa)}$ -корректна (слабо $\gamma^{(\kappa)}$ -корректна), то $\kappa < \kappa^* = (2\mu - \nu)/(\mu - \nu - 1)$ (соответственно $\kappa \leq \kappa^*$).

С другой стороны, если $\kappa < \kappa^*$ ($\kappa \leq \kappa^*$), то задача Коши $(1_s), (2_s)$ для P будет сильно $\gamma^{n(\kappa)}$ -корректной (соответственно сильно $\gamma^{n(\kappa)}$ -корректной); $n = 0, 1, \dots, \infty$.

Магнитогорский горно-металлургический институт

Поступило
21 X 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. Я. Иврий, УМН, т. 30, № 3 (1975). ² В. Я. Иврий, ДАН, т. 221, № 4 (1975).
³ В. Я. Иврий, ДАН, т. 221, № 6 (1975).