

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

М. В. КЛИБАНОВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО
УРАВНЕНИЯ И ЗАДАЧ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

(Представлено академиком Г. И. Марчуком 18 XI 1974)

Пусть функция $u(p, t)$ является решением задачи Коши для уравнения

$$u_t = \Delta u + \alpha a(p) \cdot u(p, t) \quad (1)$$

с начальными данными

$$u|_{t=0} = \delta(p - p_0).$$

Здесь $p = (x, y, z)$ — трехмерный вектор

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

α — малый параметр, $\delta(p - p_0)$ — дельта-функция Дирака, сосредоточенная в точке $p_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Функция u зависит от p_0 и α как от параметров. Поэтому в дальнейшем будем писать $u(p, t, p_0, \alpha)$.

Пусть Π и Π_0 — некоторые одномерные многообразия, лежащие в одной плоскости. Для уравнения (1) рассмотрим следующую обратную задачу.

Пусть функция $a(p)$ неизвестна, но для всех точек $p \in \Pi$, $p_0 \in \Pi_0$ и для всех $t \geq 0$ известна функция

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} u(p, t, p_0, \alpha)|_{\alpha=0} = \varphi(p, p_0, t). \quad (2)$$

Требуется по функции φ определить функцию a .

Поставленную обратную задачу будем далее называть обратной задачей (1), (2).

Пусть $S(p, p_0, \tau)$ — эллипсоид вращения с фокусами в точках p и p_0 :

$$S(p, p_0, \tau) = \{q = (\xi, \eta, \sigma) \mid |p - q| + |p_0 - q| = \tau\}.$$

где $|p - q|$ ($|p_0 - q|$) — расстояние между точками p и q (p_0 и q).

Обратную задачу (1), (2) можно свести к следующей задаче интегральной геометрии:

I. Для всех $p \in \Pi$, $p_0 \in \Pi_0$, $0 \leq \tau < \infty$ известны интегралы

$$\iint_{S(p, p_0, \tau)} |p_0 - q|^2 a(q) d\omega = b(p, p_0, \tau), \quad (3)$$

где $d\omega$ — элемент телесного угла с центром в точке p_0 , $q = (\xi, \eta, \sigma)$ — переменная точка на эллипсоиде.

Требуется по интегралам (3) восстановить функцию a .

Наряду с задачей интегральной геометрии I будем рассматривать более общую задачу

II. Пусть $0 \leq T < \infty$ — фиксированное число, $k_1 \geq 0$ и $k_2 \geq -2$ — фиксированные целые числа. Пусть для всех $p \in \Pi$, $p_0 \in \Pi_0$, $0 \leq \tau < T$ известны интегралы

$$\iint_{S(p, p_0, \tau)} \frac{1}{|p-q|^{k_1}} \frac{1}{|p_0-q|^{k_2}} a_1(q) d\omega = b_1(p, p_0, \tau). \quad (4)$$

В (4) предполагается, что интегралы в левой части этого равенства сходящиеся.

Требуется по интегралам (4) восстановить функцию a_1 .

Очевидно, при $T = \infty$, $k_1 = 0$, $k_2 = -2$ обе задачи совпадают.

Ранее подобные задачи интегральной геометрии, а также обратная задача вида (1), (2) для гиперболического уравнения рассматривались В. Г. Романовым (1). Существенное отличие рассматриваемых в настоящей заметке задач от (1) заключается в том, что в (1) предполагается, что Π — плоскость, а Π_0 — фиксированная точка на этой плоскости.

Будем изучать вопросы единственности решения поставленных задач. Рассмотрим сначала случай, когда Π и Π_0 — пересекающиеся многообразия. Введем следующее обозначение: пусть A — некоторая точка пространства R^3 , ε — положительное число; через $D_\varepsilon(A)$ обозначим ε -окрестность точки A .

Теорема 1. Пусть Π и Π_0 — две прямые, лежащие в плоскости $z=0$ и пересекающиеся в точке A ($\Pi \neq \Pi_0$). Пусть функция $a_1(q)$ непрерывна, ограничена, равна нулю в некоторой произвольно малой, но фиксированной окрестности $D_\varepsilon(A)$ точки A , и такая, что $a_1(\xi, \eta, \sigma) \equiv a_1(\xi, \eta, -\sigma)$. Предположим также, что функция $b_1(p, p_0, \tau)$ известна для всех $p \in \Pi \cap D_\varepsilon(A)$, $p_0 \in \Pi_0 \cap D_\varepsilon(A)$, $0 \leq \tau < T$.

Тогда при любых $k_1 \geq 0$, $k_2 \geq -2$ функция $a_1(q)$ однозначно восстанавливается по интегралам (4) в шаре

$$|q-A| < \frac{T}{2}.$$

Теорема 2. Пусть Π и Π_0 — две кривые, лежащие в плоскости $z=0$ и пересекающиеся в точке A . Предположим, что в некоторой малой окрестности $D_\varepsilon(A)$ точки A параметризации этих кривых бесконечно дифференцируемы и в точке A кривые Π и Π_0 не имеют общей касательной. Пусть далее выполнены условия теоремы 1.

Тогда при любых $k_1 \geq 0$, $k_2 \geq -2$ функция $a_1(q)$ однозначно восстанавливается по интегралам (4) в шаре

$$|q-A| < \frac{T}{2}. \quad (5)$$

Заметим, что оценка (5) в точности совпадает с оценкой, данной В. Г. Романовым в (1).

Пусть теперь Π и Π_0 — две параллельные прямые. Не ограничивая общности, можно считать, что их уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \Pi &= \{p = (x, y, z) \mid y = h, z = 0\}, \\ \Pi_0 &= \{p_0 = (x_0, y_0, z_0) \mid y_0 = z_0 = 0\}; \end{aligned}$$

здесь $h = \text{const}$ — некоторое число. Очевидно, $\Pi = \Pi_0$ при $h = 0$. Пусть функции a и a_1 суммируемы: $a, a_1 \in L_1(R^3)$. Обозначим через $s(\mu, \eta, \sigma)$ и

$c_1(\mu, \eta, \sigma)$ преобразования Фурье по переменной ξ функций a и a_1 соответственно:

$$c(\mu, \eta, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\xi, \eta, \sigma) \cdot \exp(-i\mu\xi) d\xi,$$

$$c_1(\mu, \eta, \sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} a_1(\xi, \eta, \sigma) \cdot \exp(-i\mu\xi) d\xi.$$

Теорема 3. Пусть $h \neq 0$. Предположим, что функция $a(\xi, \eta, \sigma)$ непрерывна, ограничена, принадлежит $L_1(R^3)$ и четна по переменной σ . Пусть кроме того, функция $c(\mu, \eta, \sigma)$ непрерывна.

Тогда решение задачи интегральной геометрии I единственно.

Теорема 4. Пусть $h \neq 0$, $T = \infty$ и в (4) $k_1 = k_2 = 0$. Предположим, что функция $a_1(\xi, \eta, \sigma)$ непрерывна, ограничена, принадлежит $L_1(R^3)$, четна по переменной σ , удовлетворяет условию Гёльдера в некоторой малой окрестности прямой Π_0 и $a_1(q) = 0$ при $q \in \Pi_0$. Пусть функция $c_1(\mu, \eta, \sigma)$ непрерывна и при каждом фиксированном μ удовлетворяет условию Гёльдера по $q' = (\eta, \sigma)$ в некоторой малой окрестности точки $q' = 0$ и $c_1(\mu, 0, 0) = 0$.

Тогда решение задачи интегральной геометрии II единственно.

Теорема 5. Пусть $h = 0$, т. е. $\Pi = \Pi_0$. И пусть функция a (a_1) может быть представлена в виде $a(\xi, \eta, \sigma) \equiv d(\xi, \eta^2 + \sigma^2)$ ($a_1(\xi, \eta, \sigma) \equiv d_1(\xi, \eta^2 + b^2)$). Предположим далее, что выполнены все условия теоремы 3 (теоремы 4), кроме условия $h \neq 0$.

Тогда решение задачи интегральной геометрии I (II) единственно.

Следствие. Пусть $T = \infty$ и выполнены условия любой из теорем 1-3 или 5 (при $k_1 = k_2 = 0$).

Тогда решение обратной задачи (1), (2) единственно.

Автор благодарен чл.-корр. АН СССР М. М. Лаврентьеву за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
11 XI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ В. Г. Романов, Некоторые обратные задачи для уравнений гиперболического типа, Новосибирск, 1972.