Доклады Академии наук СССР
1975. Том 222, № 1

УДК 551.466.81

ГЕОФИЗИКА

А. И. ЛЕОНОВ, Ю. З. МИРОПОЛЬСКИЙ

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ СЛАБОНЕЛИНЕЙНЫХ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В НЕОГРАНИЧЕННОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

(Представлено академиком Л. М. Бреховских 4 X 1974)

В работах ([1], [2]) было получено уравнение, описывающее распространение двумерных нелинейных установившихся внутренних гравитационных волн в покоящейся стратифицированной жидкости. В ([1], [2]) на основе этого уравнения были исследованы длинные волны ($\lambda/H \gg 1$, где λ длина волны, H — глубина жидкости). В настоящей работе изучается распространение волн в случае $\lambda/H \ll 1$, а также исследуется их устойчивость.

1. Будем рассматривать двумерные установившиеся внутренние волны в покоящейся невязкой и нетеплопроводной жидкости. Тогда, как показано в ([1], [2]), уравнения гидродинамики сводятся к одному уравнению для функции тока Ψ

$$\Delta\Psi + \left\{\frac{\Psi}{v^2} + \frac{1}{2vg}\left[\left(\frac{\partial\Psi}{\partial\vartheta'}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi}{\partial z'} - v\right)^2 - v^2\right]\right\} N^2\left(z' - \frac{\Psi}{v}\right) = 0, \quad (1)$$

где $\vartheta' = x' - vt'$; x', z' — горизонтальная и вертикальная координаты (положительное направление оси z' вверх); v — скорость распространения волны; t' — время; $\Delta = \left\{\frac{\partial^2}{\partial\vartheta'^2}; \frac{\partial^2}{\partial z'^2}\right\}$, g — ускорение силы тяжести, $N^2(z') = -g\rho_0^{-1}\partial\rho_0/\partial z'$ — квадрат невозмущенной частоты Вайсяля — Брента, $\rho_0(z') = \lim\limits_{\Psi\to 0}\rho(z' - \Psi/v)$; ρ — плотность.

Введем безразмерные переменные $z = z'N_0v^{-1}$; $\vartheta = \vartheta' N_0 v^{-1}$; $F = \Psi(vH)^{-1}$; $\Omega = N^2/N_0^{-2}$ ($N_0 = \mathrm{const}$ — характерное значение частоты Вайсяля — Брента). Уравнение (1) в безразмерной форме будет

$$\Delta F + F\Omega(\varepsilon z - F) = \mu\left\{\varepsilon\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right]\right\}\Omega(\varepsilon z - F), \quad (2)$$

где $\varepsilon = v(HN_0)^{-1}$; $\mu = HN_0^2g^{-1}$.

Будем далее считать $\varepsilon \ll 1$. Этот параметр с учетом соотношения $v = \omega k^{-1} = (2\pi)^{-1}\omega\lambda$ (ω — частота, k — горизонтальное волновое число) можно записать в виде $\varepsilon = (2\pi)^{-1}(\omega N_0^{-1})(\lambda H^{-1})$. Тогда малость ε ($\varepsilon \ll 1$) соответствует рассмотрению коротких внутренних волн ($\lambda H^{-1} \ll 1$). При $\varepsilon \ll 1$ задачу о распространении внутренних волн можно рассматривать как задачу в бесконечно глубокой жидкости и не учитывать граничные условия по оси z. Параметр μ, характеризующий отличие уравнения (2) от уравнения, получающегося в приближении Буссинеска, в реальных условиях мал $\mu \ll 1$. Будем далее полагать $\mu \lesssim \varepsilon \ll 1$ и определим $\mu = \mu_0\varepsilon$, где $\mu_0 \sim 1$.

2. Для решения (2) будем использовать асимптотические методы, развитые в ([3], [4]). Введем фазу Θ и «медленные» переменные $\eta=\varepsilon z$; $\zeta=\varepsilon\vartheta$, причем $\Theta=\Theta(\eta,\zeta)$. Тогда горизонтальное k и вертикальное l волновые числа определяются соотношениями

$$\Theta_\vartheta=\varepsilon\Theta_\zeta=k(\eta,\zeta),\quad \Theta_z=\varepsilon\Theta_\eta=l(\eta,\zeta) \tag{3}$$

(индексом внизу будем обозначать дифференцирование по соответствующей переменной), причем из (3) следует

$$k_\eta=l_\zeta. \tag{4}$$

Решение (2) будем искать в виде

$$F(\Theta,\eta,\zeta)=U(\Theta,\eta,\zeta)+\varepsilon U_1(\Theta,\eta,\zeta)+\ldots \tag{5}$$

Подставляя (5) в (2), переходя в (2) к переменным Θ, η, ζ, получим

$$(l^2+k^2)U_{\Theta\Theta}+V_U(\eta,U)=0; \tag{6}$$

$$(l^2+k^2)U_{1\Theta\Theta}+V_{UU}(\eta,U)U_1=G(U), \tag{7}$$

где

$$G(U)=-[(l_\eta+k_\zeta)U_\Theta+2(lU_{\Theta\eta}+kU_{\Theta\zeta})]-\frac{\mu_0}{2}(l^2+k^2)U_\Theta^2\Omega(\eta-U); \tag{8}$$

$$V(\eta,U)=\int\Omega(\eta-U)U\,dU. \tag{9}$$

Уравнение (6) допускает первый интеграл

$$\tfrac{1}{2}(l^2+k^2)U_\Theta^2+V(\eta,U)=E(\eta,\zeta), \tag{10}$$

где $E(\eta,\zeta)$ — «постоянная» интегрирования.

Решение (10) есть

$$\Theta=(l^2+k^2)^{1/2}\int\{2[E-V(\eta,U)]\}^{-1/2}dU-b(\eta,\zeta), \tag{11}$$

где $b(\eta,\zeta)$ — вторая аддитивная «постоянная» интегрирования.

Из условия существования периодического по Θ решения и (11) следует дисперсионное соотношение

$$(l^2+k^2)^{1/2}\oint\{2[E-V(\eta,U)]\}^{-1/2}dU=P, \tag{12}$$

где P — период. Для получения уравнения, которое совместно с (4), (12) составляет замкнутую систему для определения l, k и E, воспользуемся следующим приближением. Выражение (7) можно записать в виде

$$(l^2+k^2)[U_\Theta U_{1\Theta}-U_1U_{\Theta\Theta}]_\Theta=U_\Theta G(U). \tag{13}$$

Тогда условие ограниченности U_1 (отсутствие секулярных членов в (13)) с учетом (8) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left[l\int_{-P/2}^{P/2}U_\Theta^2\,d\Theta\right]+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[k\int_{-P/2}^{P/2}U_\Theta^2\,d\Theta\right]+$$

$$+\frac{\mu_0}{2}(l^2+k^2)\int_{-P/2}^{P/2}\Omega(\eta-U)U_\Theta^3\,d\Theta=0. \tag{14}$$

3. Рассмотрим внутренние волны при слабой (почти линейной стратификации) и ограничимся квадратичными членами в основном уравнении (2). Тогда (9) примет вид

$$V(\eta,\ U)=\Omega(\eta)U^2/2-\Omega_\eta(\eta)U^3/3. \tag{15}$$

Подставляя (15) в (10), получим

$$3\beta U_\Theta{}^2=c-[\gamma U^2+U^3], \tag{16}$$

где $\beta=-(l^2+k^2)[2\Omega_\eta(\eta)]^{-1}$, $\gamma=-3\Omega(\eta)[2\Omega_\eta(\eta)]^{-1}$, $c=-3E[\Omega_\eta(\eta)]^{-1}$.

Для определенности будем полагать $\Omega_\eta(\eta)<0$. Если $\Omega_\eta(\eta)>0$, то можно воспользоваться инвариантностью (16) относительно преобразования $\Omega_\eta(\eta)\to-\Omega_\eta(\eta)$, $U\to-U$. В зависимости от соотношения параметров β, γ и c решение (16) (см. ([2], [5])) представляет собой либо уединенную волну (солитон)

$$U(\Theta,\eta,\zeta)=A_s\,\mathrm{ch}^{-2}\left\{\sqrt{\frac{A_s}{12\beta}}\,\Theta\right\}-\frac{\Omega(\eta)}{\Omega_\eta(\eta)},\quad A_s=-\frac{3}{2}\frac{\Omega(\eta)}{\Omega_\eta(\eta)}, \tag{17}$$

либо периодическую (кноидальную) волну

$$U(\Theta,\zeta,\eta)=2As^{-2}\,\mathrm{dn}^2\left\{\sqrt{\frac{A}{6\beta}}\,\Theta s^{-1};\,s\right\}+\sigma_3,\quad A=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2},\quad s_2=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\sigma_1-\sigma_3}, \tag{18}$$

где σ_i — корни кубичного уравнения правой части (16), A — амплитуда, s — модуль эллиптической функции $\mathrm{dn}^2\,x$.

Рассмотрим периодическую волну (18). Условие (12) дает дисперсионное соотношение

$$l^2+k^2=\Omega(\eta)\frac{\pi^2}{4}\varphi(s),\quad \varphi(s)=K^{-2}(s)(1-s^2+s^4)^{-1/2}, \tag{19}$$

где $K(s)$ — полный эллиптический интеграл первого рода, а длина волны нормирована таким образом, что $P=2\pi$.

Подставляя (18) в (14) и производя интегрирования, получим

$$[Bk]_\zeta+[Bl]_\eta=0,\quad B(s,\ \eta)=\Omega^2\Omega_\eta{}^{-2}f(s), \tag{20}$$

где $f(s)=K(s)\{E(s)-{}^1/_2K(s)(2-s^2)(1-s^2)(1-s^2+s^4)^{-1}\}$, $E(s)$ — полный эллиптический интеграл второго рода.

Для определения типа системы уравнений (4), (19), (20) необходимо составить характеристический определитель. Составляя его, можно показать, что тип системы зависит от знака функции

$$R(s)=f(s)\varphi'(s)[2\varphi(s)f'(s)+f(s)\varphi'(s)] \tag{21}$$

(штрих обозначает дифференцирование по s). При $R(s)>0$ система (4), (19), (20) эллиптична, а при $R(s)<0$ гиперболична. Вычисления величины (21) показывают, что $R(s)<0$ при любых s, $0<s<1$, и, таким образом, система (4), (19), (20) имеет гиперболический тип. Последнее означает, что задача Коши с произвольными данными для системы (4), (19), (20) является корректной, т. е. стационарные волны обладают пространственной устойчивостью.

Система (4), (19), (20) допускает частное решение, зависящее только от поперечной координаты η:

$$k=k_0=\mathrm{const},\quad l=\left[\Omega\frac{\pi^2}{4}\varphi(s)-k_0^2\right]^{1/2},\quad B(s,\eta)l(s,\eta)=\mathrm{const}. \tag{22}$$

Из сказанного выше следует, что это решение является устойчивым по отношению к возмущениям по пространственной (продольной) координате ζ.

Дисперсионное соотношение (19) можно выразить через амплитуду волны A, а затем, используя (3), записать в размерном виде

$$\omega=kN(\eta)(l^2+k^2)^{-1/2}[1-{}^5/_{12}\Omega_\eta^2\Omega^{-2}A^2]+O(A^4). \tag{23}$$

Из (23) следует, что $\partial\omega/\partial(A^2)|_{A^2=0}<0$ и, следовательно ([5]), стационарные волны (18) неустойчивы относительно поперечных возмущений (по оси η). Это вполне понятно, так как из (23) видно, что фазовая скорость убывает с ростом амплитуды и возмущение в какой-либо области фронта волны приводит к его искривлению так, что он принимает вогнутую форму (явление самофокусировки).

Далее заметим, что стационарная волна (18) порождает среднее течение

$$\overline{U}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}U(\Theta)\,d\Theta\approx\frac{\Omega_\eta(\eta)}{2\Omega(\eta)}A^2+O(A^4). \tag{24}$$

4. Перейдем к исследованию солитона. Для солитона имеем $P=\infty$, поэтому дисперсионного соотношения (12) в обычном смысле не существует. Подставляя (17) в (14), получим

$$[a(\eta)\sin\varphi]_\eta-\mathrm{tg}\,\varphi[a(\eta)\sin\varphi]_\zeta=0,\quad a(\eta)=\Omega^{5/2}\Omega_\eta^{-2}; \tag{25}$$

здесь введен $\varphi(\eta,\zeta)$ — угол между направлением волнового вектора $\mathbf{r}=\{k;l\}=\{r\cos\varphi,\ r\sin\varphi\}$ и осью ζ.

Из уравнения (25) определяется $\varphi(\eta,\zeta)$, а из (4), которое записывается в виде

$$[r\cos\varphi]_\eta=[r\sin\varphi]_\zeta, \tag{26}$$

определяется r.

При помощи метода характеристик можно показать, что задача Коши для уравнений (25), (26) полностью разрешима и, таким образом, уединенная внутренняя волна (солитон) является устойчивым образованием. Анализ уравнений (25), (26) показывает, что солитоны распространяются по криволинейным лучам, совпадающим с характеристиками уравнений (25), (26). Причем для $\Omega_\eta<0$ по лучам распространяются положительные солитоны (возвышения), а при $\Omega_\eta>0$ — отрицательные (впадины). Амплитуды солитонов при приближении к точке $\Omega_\eta(\eta)=0$ (каустике) в данном приближении неограниченно возрастают. В частном случае $\varphi=\varphi(\eta)$, $r=r(\eta)$ имеются законы сохранения

$$a(\eta)\sin\varphi=\Omega^{5/2}\Omega_\eta^{-2}\sin\varphi=\mathrm{const},\quad r\cos\varphi=\mathrm{const}. \tag{27}$$

Институт проблем механики и
Институт океанологии им. П. П. Ширшова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
17 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. И. Леонов, Ю. З. Миропольский,* ДАН, т. 218, № 6 (1974). [2] *А. И. Леонов, Ю. З. Миропольский,* Изв. АН СССР, Физ. атм. и океана, т. 11, № 5 (1975). [3] *J. C. Luke,* Proc. Roy. Soc., A, v. 292, 403 (1966). [4] *G. B. Whitham,* J. Fluid Mech., v. 44, 2 (1970). [5] *В. И. Карпман,* Нелинейные волны в диспергирующих средах, «Наука», 1973.