

УДК 62-503.4

КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ

В. В. АЛЕКСАНДРОВ, В. Н. ЖЕРМОЛЕНКО

**КРИТЕРИЙ АБСОЛЮТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ
ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА**

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 15 X 1974)

1. Рассмотрим систему третьего порядка

$$\dot{y} = Ay + b\varphi(t, \sigma), \quad (1)$$

где $\sigma = c^*y$, $\det(b, Ab, A^2b) \neq 0$, $\det(c, Ac, A^2c) \neq 0$, $\varphi(t, 0) \equiv 0$, функция $\varphi(t, \sigma)$ удовлетворяет условиям существования, единственности решения (по Каратеодори) и при любом $t \geq t_0$ неравенству

$$0 \leq \varphi(t, \sigma) \cdot \sigma \leq k\sigma^2. \quad (2)$$

Под абсолютной устойчивостью системы (1) будем понимать асимптотическую устойчивость в целом, равномерную в классе нелинейных характеристик (2) ⁽¹⁾. Как показано Е. С. Пятницким ⁽¹⁾, абсолютная устойчивость системы (1) эквивалентна абсолютной устойчивости линейной параметрически возмущаемой системы

$$\dot{y} = Ay + bu(t)\sigma \quad (3)$$

при любых измеримых функциях $u(t)$, удовлетворяющих неравенству $0 \leq u(t) \leq k$.

Систему (3) с помощью линейного невырожденного преобразования можно свести к системе вида

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_3, \quad \dot{x}_3 = -r(v)x_1 - q(v)x_2 - p(v)x_3, \quad (4)$$

где

$$r(v) = r_1 + r_2v, \quad q(v) = q_1 + q_2v, \quad p(v) = p_1 + p_2v,$$

$v = v(t)$ — произвольная измеримая ограниченная функция,

$$v(t) \in V = \{ |v(t)| \leq 1 \}.$$

2. Рассмотрим вопрос об абсолютной устойчивости в обычном смысле ⁽²⁾ системы (4). Очевидно, что необходимым условием абсолютной устойчивости системы (4) является обобщенное условие Гурвица

$$\begin{aligned} p_1 > |p_2|, \quad q_1 > |q_2|, \quad r_1 > |r_2|, \\ \min_{-1 \leq v \leq 1} [p_2q_2v^2 + (p_1q_2 + p_2q_1 - r_2)v + (p_1q_1 - r_1)] > 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Имеют место следующие леммы для систем (4), удовлетворяющих неравенствам (5).

Лемма 1. Любое решение системы (4), (5) через конечное время выходит из каждого фазового октанта, за исключением IV, VI. Если решение не выходит из IV или VI октанта, то оно асимптотически входит в начало координат.

Лемма 2. Не стремиться в начало координат могут только решения, которые бесконечное число раз пересекают плоскость $x_2 = 0$.

Таким образом, множество всех систем (4), (5) естественно разделить на два подмножества: подмножество систем, абсолютно неколебательных

по x_2 (т. е. функция $x_2(t)$ может иметь только конечное число нулей, в которых $x_3(t) \neq 0$), и подмножество систем, в которых возможны колебания по x_2 . Как следует из леммы 2, первое подмножество состоит из абсолютно устойчивых (в обычном смысле) систем. Границы этого подмножества дает

Теорема 1. Для абсолютной неколебательности по x_2 системы (4) необходимо и достаточно, чтобы

$$\max_{-1 \leq v \leq 1} D(v) \leq 0, \quad \max_{-1 \leq x \leq 1} \lambda_1(v) \leq \min_{-1 \leq v \leq 1} \lambda_2(v), \quad \max_{-1 \leq v \leq 1} \lambda_2(v) \leq \min_{-1 \leq v \leq 1} \lambda_3(v), \quad (6)$$

где $D(v)$ — дискриминант, $-\lambda_1(v)$, $-\lambda_2(v)$, $-\lambda_3(v)$ — корни характеристического уравнения системы (4), расположенные в порядке возрастания, $\lambda_1(v) \leq \lambda_2(v) \leq \lambda_3(v)$.

3. Для второго подмножества систем (4), (5) рассмотрим задачу Б. В. Булгакова о накоплении возмущений ⁽³⁾, которая в силу линейности функций $p(v)$, $q(v)$, $r(v)$ и непустоты множества V_α допустимых возмущений имеет решение:

$$\sup_{v \in V_\alpha} [x_1^2(T_k) + x_3^2(T_k)] = \max_{v \in V_\alpha} [x_1^2(T_k) + x_3^2(T_k)], \quad (7)$$

где $x_1(t_0) = \cos \alpha$, $x_2(t_0) = 0$, $x_2(T_k) = -\sin \alpha$, $0 < \alpha < \pi$, T_k — k -й нуль функции $x_2(t)$, $t > t_0$.

Используя принцип максимума Л. С. Понтрягина, можно доказать следующую лемму.

Лемма 3. Задача Б. В. Булгакова (7) при $\alpha \in (0, \pi)$ имеет единственное решение $v_0(t)$, $x_1(v_0, t)$, $x_2(v_0, t)$, $x_3(v_0, t)$, которое определяется при решении задачи Коши:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & x_1(t_0) &= \cos \alpha; \\ \dot{x}_2 &= x_3, & x_2(t_0) &= 0; \\ \dot{x}_3 &= -(p_1 x_3 + q_1 x_2 + r_1 x_1) + (p_2 x_3 + q_2 x_2 + r_2 x_1) v_0, & x_3(t_0) &= -\sin \alpha; \\ \dot{\psi}_1 &= -r_1 \psi_3 + r_2 v_0 \psi_3, & \psi_1(t_0) &= -\cos \alpha; \\ \dot{\psi}_2 &= -\psi_1 + q_1 \psi_3 - q_2 v_0 \psi_3, & \psi_2(t_0) &= p(v_0(t_0)) \sin \alpha - r(v_0(t_0)) \cos \alpha; \\ \dot{\psi}_3 &= -\psi_2 + p_1 \psi_3 - p_2 v_0 \psi_3, & \psi_3(t_0) &= -\sin \alpha; \\ v_0 &= \text{sign}[\psi(p_2 x_3 + q_2 x_2 + r_2 x_1)], & 0 < \alpha < \pi. \end{aligned} \quad (8)$$

Оказывается, что для систем (4), (5) из второго подмножества для абсолютной устойчивости требуется ввести дополнительное условие, которое назовем условием Булгакова.

Теорема 2. Для системы (4), (5), в которой возможны колебания по x_2 , необходимым и достаточным условием абсолютной устойчивости является условие Булгакова

$$\max_{\alpha \in \Gamma} [x_1^2(v_0, T_2) + x_3^2(v_0, T_2)] < 1, \quad (9)$$

где $x_1(v_0, t)$, $x_3(v_0, t)$ — решение задачи Коши (8),

$$\Gamma = \left\{ 0 \leq \alpha \leq \pi; \frac{x_1(T_2)}{x_3(T_2)} = -\text{ctg } \alpha \right\},$$

T_2 — второй нуль функции $x_2(t)$, $t > t_0$.

4. Из леммы 2 и теорем 1, 2 следует, что абсолютная устойчивость в обычном смысле ⁽²⁾ системы (4) эквивалентна равномерной абсолютной устойчивости системы (4) ⁽¹⁾.

Следовательно, оба определения абсолютной устойчивости ^(1, 2) эквивалентны также и для системы (1). Это позволяет сформулировать следующий теорему.

Теорема 3. Для абсолютной устойчивости системы (1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись обобщенное условие Гурвица (5) и одно из

двух обязательных условий: а) условие абсолютной неколебательности (б) либо б) условие Булгакова (9).

Аналогичный результат для систем второго порядка опубликован в статье (¹).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
11 IX 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Е. С. Пятницкий, Автоматика и телемеханика, № 1, 3 (1970). ² М. А. Айзерман, Ф. Р. Гантмахер, Абсолютная устойчивость регулируемых систем, М., 1963.
³ Б. В. Булгаков, ДАН, т. 51, № 5, 339 (1946). ⁴ В. В. Александров, В. Н. Жермоленко, Вестник МГУ, № 5, 102 (1972).