

П. И. ЛИЗОРКИН

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПРОСТРАНСТВ L_p С ВЕСОМ

(Представлено академиком С. М. Никольским 31 X 1974)

1. Пусть A_0, A_1 — банаховы пространства, непрерывно вложенные в отделимое линейное топологическое пространство $\mathcal{A}$. Через $A_0 + A_1$ обозначим совокупность элементов $a \in \mathcal{A}$, представимых в виде

$$a = a_0 + a_1, \quad a_0 \in A_0, \quad a_1 \in A_1. \quad (1)$$

По определению положим *

$$\|a\|_{A_0 + A_1} = \inf_{a = a_0 + a_1} (\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1}). \quad (2)$$

При нормировке соотношением (2) $A_0 + A_1$ становится банаховым пространством. Рассмотрим на $A_0 + A_1$ функционал

$$K(t, a; A_0, A_1) = K(t, a) = \inf_{a = a_0 + a_1} (\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1}).$$

Совокупность элементов $a \in A_0 + A_1$ с конечной нормой

$$\|a\|_{(A_0, A_1)_{\theta, q}} = \|a\|_{\theta, q} = \left\{ \int_0^\infty [t^{-\theta} K(t, a)]^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q}, \quad 0 < \theta < 1, \quad 1 \leq q < \infty;$$

$$\|a\|_{(A_0, A_1)_{\theta, \infty}} = \|a\|_{\theta, \infty} = \sup_t [t^{-\theta} K(t, a)], \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad q = \infty,$$

оказывается банаховым пространством и обозначается символом $(A_0, A_1)_{\theta, q}$. Оно называется интерполяционным пространством пары A_0, A_1 , полученным по методу действительной интерполяции по Питре (см. книгу (1)).

В теории интерполяции банаховых пространств довольно давно стоит задача об описании пространств

$$(L_{p_0}^{\omega}(\Omega, \nu), L_{p_1}^{\omega}(\Omega, \nu))_{\theta, q},$$

где через $L_p^{\omega}(\Omega, \nu)$ обозначена совокупность функций $f(x)$, суммируемых в степени p (по мере ν) и с весом $\omega(x)$ на области $\Omega \subset R^n$ (см. п. 2). В работе Гилберта (2) дано полное решение этой задачи в случае $p_0 = p_1$. В данной работе рассматривается случай $p_0 \neq p_1$. Результат формулируется в терминах пространств Лоренца с весом $L_{pq}^{\omega}(\mu)$, определение которых и некоторые их свойства воспроизводятся в следующем пункте. Попутно рассматривается ряд смежных вопросов.

2. Пусть (X, μ) — пространство с σ -конечной мерой μ , $\mathfrak{M}(X, \mu)$ — совокупность комплексно-значных μ -измеримых функций на X . Через $L_p^{\omega}(X, \mu)$ обозначим совокупность функций $f(x) \in \mathfrak{M}(X, \mu)$, суммируемых в степени p и с весом $\omega(x)$ по X ($\omega(x)$ — неотрицательная μ -измеримая функция). $L_p^{\omega}(X, \mu)$ — банахово пространство с нормой

$$\|f\|_{L_p^{\omega}(X, \mu)} = \left\{ \int_X |\omega(x) f(x)|^p d\mu \right\}^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

$$\|f\|_{L_{\infty}^{\omega}(X, \mu)} = \text{ess } \mu\text{-sup}_{x \in X} |\omega(x) f(x)|, \quad p = \infty.$$

* Infimum берется по всевозможным представлениям вида (1).

Через $g^*(t)$, $0 < t < \infty$, обозначим равноизмеримую перестановку функции g в невозрастающем порядке (т. е. $g^*(t_1) \geq g^*(t_2)$, $t_1 < t_2$ и $\text{mes} \{t \in (0, \infty); g^*(t) > \sigma\} = \mu \{x; x \in X, |g(x)| > \sigma\}$).

Пусть $g^{**}(t)$ — осреднение $g^*(t)$,

$$g^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t g^*(s) ds.$$

Определение. Совокупность функций $f(x) \in \mathfrak{M}(X, \mu)$ с конечной нормой

$$\|f\|_{L_{p,q}^\omega(X, \mu)} = \left\{ \int_0^\infty [(\omega f)^{**} t^{1/p}]^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q}, \quad 1 < p < \infty, \quad 1 \leq q < \infty,$$

$$\|f\|_{L_{p,\infty}^\omega(X, \mu)} = \sup_t [(\omega f)^{**} t^{1/p}], \quad 1 \leq p \leq \infty, \quad q = \infty$$

называется **весовым пространством Лоренца** $L_{p,q}^\omega(X, \mu)$ (с весом ω относительно меры μ).

Мы будем использовать следующую лемму.

Лемма 1. *Пространство $L_{p,q}^\omega(X, \mu)$ с точностью до эквивалентности норм совпадает с пространством*

$$(L_{p_0}^\omega(X, \mu), L_{p_1}^\omega(X, \mu))_{\theta, q}, \quad 1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1, \quad 1 \leq p_0 \neq p_1 \leq \infty$$

Доказательство леммы легко получается из невесового случая

$$(L_{p_0}(X, \mu), L_{p_1}(X, \mu))_{\theta, q} \sim L_{p,q}(X, \mu)$$

(см. (1)) и высказанных определений. Отметим, что в лемме 1 и ниже рассматриваемые весовые функции считаются положительными почти всюду.

Замечание 1. В случае $q = p$ пространство $L_{p,q}^\omega(X, \mu)$ совпадает с пространством $L_p^\omega(X, \mu)$, которое, в свою очередь, дает $L_p(X, \mu)$ при $\omega = 1$.

3. Пусть теперь Ω — область n -мерного евклидова пространства R^n точек $u = (u_1, \dots, u_n)$. Пусть в Ω задана σ -конечная мера λ и весовая функция $\rho(u)$. Рассмотрим задачу интерполирования пространств $L_{p_0}(\Omega, \lambda)$ и $L_{p_1}(\Omega, \lambda)$.

В весовом пространстве $L_{p_1}(\Omega, \lambda)$ введем новую нормировку. Пусть $X = \Omega \times (0, \infty)$,

$$X_\rho = \{(u, v); u \in \Omega, v \in (0, \infty), v < \rho(u) < 2v\} \quad (3)$$

и $\chi_\rho(u, v)$ — характеристическая функция множества X_ρ , рассматриваемого в X . Обозначим $(u, v) = x$,

$$f(u)\chi_\rho(u, v) = F(u, v) = F(x), \quad (4)$$

$$d\mu = c \frac{d\lambda dv}{v^{1+\beta}}, \quad c^{-1} = \int_1^2 z^{-(p_1+1)} dz, \quad \omega_1(u, v) = \omega_1(x) = v^{1+\beta/p_1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_{p_1}^{p_1}(\Omega, \lambda)}^{p_1} &= \int_\Omega (\rho(u) |f(u)|)^{p_1} d\lambda = \\ &= c \int_0^\infty \int_\Omega (v^{1+\beta/p_1} |F(u, v)|)^{p_1} \frac{d\lambda dv}{v^{1+\beta}} = \int_X (\omega_1(x) |F(x)|)^{p_1} d\mu. \end{aligned} \quad (5)$$

Следовательно, пространство $L_{p_1}(\Omega, \lambda)$ можно рассматривать как подпространство пространства $L_{p_1, \omega_1}(X, \mu)$. Аналогично, невесовое пространство

во $L_{p_0}(\Omega, \lambda)$ будем рассматривать как пространство, норма в котором определена равенством

$$\|f\|_{L_{p_0}(\Omega, \lambda)} = \frac{1}{c \ln 2} \int_X (\omega_0(x) |F(x)|)^{p_0} d\mu, \quad \omega_0(x) = v^{p/p_0}. \quad (6)$$

Выберем в качестве значения параметра β число

$$\beta = (1/p_0 - 1/p_1)^{-1}.$$

Тогда $\omega_1(x) = \omega_0(x) = \omega(x)$ и рассматриваемая задача сводится к интерполяции подпространств из пространств $L_{p_0}^\omega(X, \mu)$, $L_{p_1}^\omega(X, \mu)$. В самом деле, формула (4) устанавливает взаимно однозначное соответствие между пространством $L_{p_1}^0(\Omega, \lambda)$ и некоторым подпространством $L_{p_1}^\omega(X, \mu)$, причем, как показывает соотношение (5), это соотношение является изометрическим изоморфизмом. Аналогично, (4) и (5) обеспечивает изоморфизм с точностью до пропорциональности норм пространства $L_{p_0}(\Omega, \lambda)$ и соответствующего подпространства $L_{p_0}^\omega(X, \mu)$. В силу этого мы не будем вводить специальных обозначений для упомянутых подпространств, отождествляя их просто с $L_{p_0}(\Omega, \lambda)$ и $L_{p_1}^0(\Omega, \lambda)$.

Имеет место следующий результат, в существенном принадлежащий М. Бауенди и Ш. Гулауйку⁽³⁾.

Пусть (A_0, A_1) — интерполяционная пара банаховых пространств, а B — замкнутое подпространство $A_0 + A_1$ такое, что существует оператор проектирования P (в $A_0 + A_1$), порождающий B (т. е. $B = P(A_0 + A_1)$) и непрерывно переводящий A_i в A_i , $i=0, 1$.

Тогда пара $(A_0 \cap B, A_1 \cap B)$ является интерполяционной и

$$(A_0 \cap B, A_1 \cap B)_{\theta, q} = (A_0, A_1)_{\theta, q} \cap B. \quad (7)$$

В рассматриваемом нами случае в качестве A_0, A_1 выступают $L_{p_0}^\omega(X, \mu)$, $L_{p_1}^\omega(X, \mu)$ соответственно, в качестве B — сумма $L_{p_0}(\Omega, \lambda) + L_{p_1}^0(\Omega, \lambda)$. Оператор P можно, например, взять в виде

$$PF = \frac{1}{\ln 2} \chi_p(u, v) \int_0^\infty F(u, \xi) \chi_p(u, \xi) \frac{d\xi}{\xi}.$$

Ясно, что P не меняет функций вида $f(u) \chi_p(u, v)$ и, таким образом, является проектором. Норма P в A_i , $i=0, 1$, легко оценивается. Таким образом, условия теоремы Бауенди, Гулауйка оказываются выполненными и на ее основе приходим к теореме 1.

Теорема 1. Для того чтобы функция $f(u)$ принадлежала пространству

$$V = (L_{p_0}(\Omega, \lambda), L_{p_1}^0(\Omega, \lambda))_{\theta, q}, \quad p_0 \neq p_1,$$

необходимо и достаточно, чтобы произведение $f(u) \chi_p(u, v)$ принадлежало пространству $L_{p, q}^\omega(X, \mu)$, где

$$\gamma = \frac{1}{p_0} \left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} \right)^{-1}, \quad d\mu = \frac{d\lambda dv}{v^{1+\beta}}, \quad \beta = \left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} \right)^{-1},$$

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} \quad (\text{т. о. } \gamma p - \beta = \theta p).$$

Другими словами, пространство V характеризуется конечностью величины

$$\left\{ \int_0^\infty [t^{1/p} \Phi^{**}(t)]^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q}, \quad (8)$$

где $\Phi(x) = \Phi(u, v) = v^* f(u) \chi_p(u, v)$ и перестановка $\Phi^*(t)$ функции $\Phi(x)$ образуется относительно меры μ . При этом величина (8) эквивалентна норме f в V .

Доказательство. В силу конкретного выбора A_0, A_1, B формула (7) превращается в следующую:

$$(L_{p_0}(\Omega, \lambda), L_{p_1}(\Omega, \lambda))_{\theta, q} = (L_{p_0}^{\omega}(X, \mu), L_{p_1}^{\omega}(X, \mu))_{\theta, q} \cap (L_{p_0}(\Omega, \lambda) + L_{p_1}(\Omega, \lambda)).$$

По лемме 1 пространство справа эквивалентно пересечению

$$L_{pq}^{\omega}(X, \mu) \cap (L_{p_0}(\Omega, \lambda) + L_{p_1}(\Omega, \lambda)),$$

что приводит к теореме, если вспомнить, что правая сумма состоит из функций вида $f(u)\chi_p(u, v)$.

4. Теорема 2. Для того чтобы функция $f(u)$ принадлежала пространству

$$W = (L_{p_0}^{\omega_0}(\Omega, v), L_{p_1}^{\omega_1}(\Omega, v))_{\theta, q}, \quad p_0 \neq p_1,$$

необходимо и достаточно, чтобы функция

$$\Phi(u, v) = f(u)\chi_{\omega}(u, v), \quad \omega = (\omega_1^{p_1}/\omega_0^{p_0})^{1/p_1},$$

принадлежала пространству $L_{pq}^{v^{\gamma}}(X, \mu)$, т. е. обладала бы конечным интегралом

$$\left\{ \int_0^{\infty} (\Psi^{**}(t) \cdot t^{1/p})^q \frac{dt}{t} \right\}^{1/q}, \quad (9)$$

где $\Psi = v^{\gamma}\Phi(u, v)$ и Ψ^{*} образуется относительно меры μ ($d\mu = v^{-1-\beta}\omega_0^{p_0}(u)dv dv, \gamma = \frac{1}{p_0} \left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} \right)^{-1}$, $\beta = \left(\frac{1}{p_0} - \frac{1}{p_1} \right)^{-1}$, $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$).

Величина (9) эквивалентна норме f в W .

Доказательство заключается в сведении к теореме 1.

Следствие 1.

$$(L_{p_0}^{\omega_0}(\Omega, v), L_{p_1}^{\omega_1}(\Omega, v))_{\theta, p} \sim L_p^{\omega}(\Omega, v), \quad (10)$$

где $\omega = \omega_0^{1-\theta}\omega_1^{\theta}$, $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$.

Доказательство. По теореме 2 в условиях следствия получается пространство $L_{pp}^{v^{\gamma}}(X, \mu) = L_p^{v^{\gamma}}(X, \mu)$ в интеграл (9) равен интегралу

$$\begin{aligned} \int_X |v^{\gamma}\Phi(u, v)|^p \frac{\omega_0^{p_0}(u)dv dv}{v^{1+\beta}} &= \int_{\Omega} |f(u)|^p \omega_0^{p_0}(u)dv \int_{1/p_0 < 1/v < 2/p_0} \frac{dv}{v^{1+\beta-1/p}} = \\ &= c \int_{\Omega} \rho^{\gamma p - \beta} |f(u)|^p \omega_0^{p_0}(u)dv = c \int_{\Omega} \omega_0^{1-\theta} \omega_1^{\theta} |f(u)|^p dv. \end{aligned}$$

Замечание 2. В формулировке теорем 1 и 2 можно считать $q = \infty$, заменяя при этом величины (8), (9) соответствующими выражениями.

Замечание 3. Соотношение (10) известно — это интерполяционная теорема Стейна, Вейса.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
3 X 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ P. Butzer, H. Berens, Semi-Groups of Operators and Approximation, 1967. ² J. Gilbert, Ark. Math., B. 10, № 2, 235 (1972). ³ M. S. Baouendi, C. Goulaouic, C. R., t. 265, 313 (1967).