

УДК 531.51

ФИЗИКА

Г. А. АЛЕКСЕЕВ

ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ И ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ, ДВИЖУЩЕЙСЯ В ПОЛЕ НОРДСТРЕМА — РЕЙССНЕРА

(Представлено академиком Л. И. Седовым 7 X 1974)

Произвольное свободное движение нейтральной частицы во внешнем гравитационном поле сопровождается излучением гравитационных волн, спектр которых зависит как от характеристик внешнего поля, так и самой частицы (включая параметры ее траектории).

Если падающая частица обладает электрическим зарядом, то ее движение сопровождается излучением гравитационных и электромагнитных волн. При наличии в пространстве внешнего электромагнитного поля излучение частиц (как заряженных, так и нейтральных) будет иметь и гравитационную, и электромагнитную составляющие, вследствие того, что гравитационная волна, распространяющаяся во внешнем электромагнитном поле, порождает электромагнитную волну ⁽¹⁾.

Излучение частиц (заряженных и нейтральных) в поле незаряженной черной дыры исследовалось как численными, так и аналитическими методами ⁽²⁻⁸⁾. Это излучение может быть описано системой уравнений Эйнштейна, линеаризованной около решения, соответствующего внешнему полю черной дыры. Полученная таким образом система линейных уравнений является неоднородной. В ее правой части содержатся «источниковые члены», выражаемые через компоненты тензора энергии-импульса частиц, присутствующих во внешнем поле черной дыры. Наличие заряженных частиц приводит также к появлению в правых частях уравнений Максвелла компонент вектора 4-тока частиц.

Система уравнений, описывающая произвольные волновые поля малой амплитуды во внешнем пространстве черной дыры (включая и поле излучения частиц, получена в работах ⁽⁹⁾ и ⁽²⁾ для случая, когда фоном является поле Шварцшильда, в работах ⁽¹⁰⁾ — для поля Керра, ^(7, 8, 11), а также ⁽¹²⁾ — для поля Нордстрема — Рейсснера.

В случае поля Нордстрема — Рейсснера полученная система эквивалентна полной системе уравнений Эйнштейна — Максвелла, линеаризованной около решения фона. В отличие от работ ^(7, 8), где для каждого типа возмущений (четных и нечетных) была получена с учетом источниковых членов замкнутая система двух «зацепляющихся» уравнений второго порядка, в работе ⁽¹²⁾ для обоих типов возмущений и независимо в ⁽¹¹⁾ только для нечетных возмущений получена без учета источниковых членов система двух уравнений второго порядка, распадающаяся при подходящем выборе переменных на два независимых уравнения второго порядка. Целью настоящей работы является получение этой распадающейся системы уравнений с учетом источниковых членов, как функций зарядов, масс частиц, а также параметров их траекторий.

1. Траектория заряженной пробной частицы. Гравитационное поле Нордстрема — Рейсснера описывается метрикой

$$ds^2 = e^{\nu} c^2 dt^2 - e^{-\nu} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

где $e^v = 1 - 2m/r + q^2/r^2$, $m = \gamma M/c^2$, $q^2 = \gamma Q^2/c^4$, M — масса, Q — заряд черной дыры, γ — гравитационная постоянная; 4-потенциал электромагнитного поля $A_i = \{Q/r, 0, 0, 0\}$.

Траектория заряженной частицы без учета реакции излучения может быть найдена методом Гамильтона — Якоби ⁽¹³⁾. Компоненты 4-скорости частицы

$$u^0 = e^{-v}(E - \varepsilon/r), \quad u^1 = \pm \sqrt{(E - \varepsilon/r)^2 - e^v(1 + N^2/r^2)}, \\ u^2 = 0, \quad u^3 = N/r^2$$

(движение происходит в плоскости экватора $\theta = \pi/2$, E, N — постоянные, являющиеся интегралами движения, $\varepsilon = \sigma Q/\mu c^2$, σ, μ — заряд и масса частицы, $x^0 = ct$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$). Вклад от этой частицы в тензор энергии-импульса и в 4-ток

$$\delta T_{ik} = \rho c^2 u_i u_k, \quad \delta j_i = \tau c u_i. \quad (1,1)$$

Плотность массы покоя ρ и заряда τ определяются по формулам $(R(t), \Phi(t))$ определяют траекторию частицы

$$\left\{ \frac{\rho}{\tau} \right\} = \left\{ \frac{\mu}{\sigma} \right\} (1/u^0 r^2) \delta(r - R(t)) \delta(\varphi - \Phi(t)) \delta(\theta - \pi/2). \quad (1,2)$$

2. Уравнения, описывающие излучение частиц. Гравитационное и электромагнитное излучение заряженной частицы, движущейся произвольно под действием только гравитационного и электрического полей невращающейся заряженной черной дыры, описывается системой уравнений Эйнштейна — Максвелла, линеаризованной около решения Нордстрема — Рейсснера. Частицам в линеаризованных уравнениях соответствуют «источниковые» члены, входящие в возмущенный тензор энергии-импульса в уравнениях Эйнштейна и в 4-ток в уравнениях Максвелла и представляющие собой δ -образные особенности в пространственных распределениях массы и заряда (формулы (1,1), (1,2)).

Эта система уравнений без источниковых членов для произвольных малых возмущений гравитационного и электромагнитного полей после разложения возмущений по сферическим функциям и преобразования Фурье по времени в работе ⁽¹²⁾ сведена к четырем обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка, каждое из которых имеет вид стационарного уравнения Шредингера во внешнем потенциальном силовом поле (соответствующий потенциал определяется одной из четырех функций $U_{\pm}, V_{\pm}$)

$$(d^2/dr^{*2} + U_{\pm})\chi_{\pm} = 0, \quad (d^2/dr^{*2} + V_{\pm})\eta_{\pm} = 0, \quad (2,1) \\ U_{\pm} = \omega^2 + \Delta e^v/r^2 + (C_{\pm} - 4q^2/r)(\Delta^2 - 4 + 12m/r - 12m^2/r^2 + \\ + 4mq^2/r^3)e^v/r^3 p^2(r) + 8q^2 e^{2v}/r^4 p(r), \\ V_{\pm} = \omega^2 + \Delta e^v/r^2 + (C_{\pm} - 4q^2/r)e^v/r^3, \\ C_{\pm} = 3m \pm \sqrt{9m^2 - 4q^2}(\Delta + 2), \quad p(r) = \Delta + 2 - 6m/r + 4q^2/r^2;$$

здесь ω — частота, $\Delta = -l(l+1)$, l — номер сферической гармоники, $r^* = \int \exp(-v) dr$. Функции $\chi_{\pm}$ описывают четные, а $\eta_{\pm}$ — нечетные возмущения и имеют вид

$$\chi_{\pm} = (C_{\pm} - 4q^2/r)r^2 [h_{00}/r + \partial_2(h^{12} \sin \theta)/\sin \theta + \partial_3 h^{13}]/p(r) - 2q^2 \delta F_{01}/F_{01}, \\ \eta_{\pm} = 2C_{\pm}(\partial_2 h_3^1 - \partial_3 h_2^1)/r \sin \theta - 8q^2(\partial/c \partial t) \delta F_{23}/F_{01}.$$

Все компоненты возмущений метрики и электромагнитного поля определяются по функциям $\chi_{\pm}, \eta_{\pm}$ в квадратурах.

При заряде Q , стремящемся к нулю, уравнения для $\chi_{\pm}, \eta_{\pm}$ переходят в известные уравнения Редже и Уилера ⁽⁹⁾ и Зерилли ⁽²⁾ для возмущений гравитационного поля на фоне метрики Шварцшильда, а уравнения для χ_{-}, η_{-} — в уравнения, эквивалентные уравнениям Максвелла на этом фоне.

Присутствие в пространстве частиц приводит к тому, что уравнения (2,1) становятся неоднородными. В их правых частях появляются источники членов, зависящие от масс, зарядов частиц, параметров их траекторий. В результате длинных вычислений получаем

$$\begin{aligned} (d^2/dr^{*2} + U_{\pm})\chi_{\pm} &= I_{\pm}, \quad (d^2/dr^{*2} + V_{\pm})\eta_{\pm} = J_{\pm}, \\ I_{\pm}/(\kappa\mu c^2 A_l^n) &= -p(r) (C_{\pm} - 4q^2/r) (d/dr^*) [u_0 D(r^*, \omega)/p^2(r)] + \\ &+ \varepsilon (d/dr^*) D(r^*, \omega) + D(r^*, \omega) \{u_0 (C_{\pm} - 4q^2/r) [i(n\Omega - \omega)V - \\ &- \Delta(1 - V^2)/2r - \varepsilon/r^2 u^0]/p(r) + i\omega V\varepsilon - 8q^2 e^v u_0/r^2 p(r) - \\ &- C_{\pm} u^0 \Omega^2 r (\Delta + 2n^2)/2(\Delta + 2)\}, \\ J_{\pm}/(4\kappa\mu c^2 B_l^n) &= inr C_{\pm} (d/dr^*) [\Omega^2 u^0 D(r^*, \omega)]/(\Delta + 2) - \\ &- \Omega D(r^*, \omega) [(C_{\pm} - 4q^2/r) V u_0/r + i\omega\varepsilon]; \end{aligned} \quad (2,2)$$

здесь $\kappa = 8\pi\gamma/c^4$, $\Omega = d\varphi/dx^0$, $V = dr^*/dx^0$, $A_l^n = Y_{ln}^*(\pi/2, 0)$, $B_l^n = -(\partial/\partial\theta)Y_{ln}^*(\pi/2, 0)$, $Y_{ln}(\theta, \varphi)$ — сферические функции, звездочка означает комплексное сопряжение;

$$D(r^*, \omega) = \int_0^{2\pi} \int \exp[-i(\omega t + n\varphi)] \delta(r^* - R^*(t)) \delta(\varphi - \Phi(t)) d\varphi dt,$$

причем интеграл по времени берется по периоду движения или от $-\infty$ до $+\infty$ для непериодического движения частицы.

Коэффициенты A_l^n отличны от нуля только при четных $l + |n|$ — «четные» волны, а B_l^n — при нечетных $l + |n|$ — «нечетные» волны.

Переход к полю Шварцшильда осуществляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \{\chi_{\text{грав}}, \eta_{\text{грав}}, \chi_{\text{эл}}, \eta_{\text{эл}}\} &= \lim_{Q \rightarrow 0} \{\chi_+, \eta_+, \chi_-/Q, \eta_-/Q\}, \\ \{I_{\text{грав}}, J_{\text{грав}}, I_{\text{эл}}, J_{\text{эл}}\} &= \lim_{Q \rightarrow 0} \{I_+, J_+, I_-/Q, J_-/Q\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим при $Q \neq 0$ частные случаи движения частицы.

А) Движение по круговой орбите.

$$\begin{aligned} V &= 0, \quad r = R = \text{const}, \quad D(r^*, \omega) = \delta(\omega + n\Omega) \delta(r^* - R^*), \\ I_{\pm}/\kappa\mu c^2 A_l^n \delta(\omega + n\Omega) &= [-u_0 (C_{\pm} - 4q^2/R)/p(R) + \varepsilon] (d/dr^*) \delta(r^* - R^*) + \\ &+ u_0 \delta(r^* - R^*) \{ (C_{\pm} - 4q^2/R) [-\Delta/2R + e^v (6m/R - 8q^2/R^2)/p(R) - \\ &- \varepsilon/u^0 R^2] - 8q^2 e^v /R^2 - C_{\pm} \Omega^2 R e^{-v} p(R) (\Delta + 2n^2)/2(\Delta + 2) \} /p(R), \\ J_{\pm}/4\kappa\mu c^2 B_l^n \delta(\omega + n\Omega) &= inRC_{\pm} \Omega^2 u^0 (d/dr^*) \delta(r^* - R^*)/(\Delta + 2) - \\ &- [inC_{\pm} \Omega u^0/(\Delta + 2) + i\omega\varepsilon] \Omega \delta(r^* - R^*). \end{aligned}$$

Б) Радиальное падение частицы на черную дыру. Направим ось θ вдоль траектории частицы. Тогда из коэффициентов A_l^n отличны от нуля будут лишь $A_l^0 = [(2l+1)/4\pi]^{1/2}$, что соответствует разложению искомым функций по полиномам Лежандра. При радиальном движении

$$\begin{aligned} \Omega &= 0, \quad D(r^*, \omega) = V^{-1} \exp[-i\omega t(r^*)], \\ I_{\pm}/\kappa\mu c^2 A_l^0 \exp[-i\omega t(r^*)] &= -u_0 (C_{\pm} - 4q^2/r) [(d/dr^*) (1/V) + \\ &+ i\omega (1 - 1/V^2) + \Delta(1 - V^2)/2Vr - 2e^v (6m/r - 8q^2/r^2)/rp(r) V + \\ &+ 2\varepsilon/r^2 u^0 V]/p(r) - 8q^2 u_0 e^v /r^2 p(r) V + \varepsilon [(d/dr^*) (1/V) + i\omega (1 - 1/V^2)], \\ J_{\pm} &= 0. \end{aligned}$$

Радиально падающая частица излучает только четные волны.

3. Построение решений уравнений (2,2), описывающих излучение заряженной частицы.

Функции $U_{\pm}$ и $V_{\pm}$, характеризующие потенциальные барьеры, при $r^* \rightarrow \pm\infty$ стремятся к постоянному значению ω^2 , и общее решение однородных уравнений (2,1) вблизи горизонта событий ($r^* \rightarrow -\infty$) и вдали от чер-

ной дыры ($r^* \rightarrow +\infty$) представляет собой совокупность волн, падающих на черную дыру или уходящих от нее, т. е. любое нестационарное решение этих уравнений имеет асимптотический (при $r^* \rightarrow \pm\infty$) вид

$$A \exp(i\omega r^*) + B \exp(-i\omega r^*).$$

Решение неоднородных уравнений (2,2) можно построить с помощью функций Грина. В качестве фундаментальной системы решений однородных уравнений выберем следующие два решения, определяемые своими асимптотиками (под y понимается любая из четырех функций $\chi_{\pm}, \eta_{\pm}$):

$$y_{out} \approx e^{-i\omega r^*}, r^* \rightarrow +\infty; \quad y_{in} \approx e^{i\omega r^*}, r^* \rightarrow -\infty;$$

y_{in} — решение, которое вблизи горизонта событий представляет собой падающую волну, y_{out} изображает вдали от черной дыры лишь уходящую волну. Вронскиан этих решений определяется по формуле

$$W(y_{out}, y_{in}) = 2i\omega/T(\omega),$$

где $T(\omega)$ — коэффициент прохождения волн через соответствующий потенциальный барьер.

Решение, описывающее излучение частицы, должно представлять собой при $r^* \rightarrow +\infty$ уходящую от черной дыры волну, а при $r^* \rightarrow -\infty$ — падающую на нее волну. Соответствующая функция Грина имеет вид $\theta(x)$ — функция Хевисайда)

$$\Gamma(r^*, \xi) = -T(\omega) [\theta(r^* - \xi) y_{out}(r^*) y_{in}(\xi) + \theta(\xi - r^*) y_{in}(r^*) y_{out}(\xi)] / 2i\omega,$$

и, следовательно, искомое решение уравнений (2,2) представляется в виде

$$y(r^*) = -\frac{T(\omega)}{2i\omega} \left[y_{out}(r^*) \int_{-\infty}^{r^*} y_{in}(\xi) f(\xi) d\xi + y_{in}(r^*) \int_{r^*}^{+\infty} y_{out}(\xi) f(\xi) d\xi \right],$$

где $f(\xi)$ — одна из функций $I_{\pm}, J_{\pm}$, соответствующая выбору y : $\chi_{\pm}, \eta_{\pm}$.

4. Средний поток энергии $dE/dt d\Omega$, переносимый волнами, может быть выражен через функции $\chi_{\pm}, \eta_{\pm}$:

$$\frac{dE}{dt d\Omega} = \frac{\omega^2}{16\pi q^2 \Delta (C_+ - C_-)} \left\{ C_- W(\chi_+) - C_+ W(\chi_-) + \right. \\ \left. + \frac{1}{16\omega^2} [C_- W(\eta_+) - C_+ W(\eta_-)] \right\} \frac{c^5}{\gamma}; \quad (4,1)$$

$$W(y) = \left(y \frac{d}{dr^*} y^* - y^* \frac{d}{dr^*} y \right) / 2i\omega.$$

Полезно отметить, что выражение (4,1) не является асимптотическим и пригодно для вычисления среднего потока энергии излучения на любом конечном расстоянии от черной дыры.

Автор благодарит Н. Р. Сибгатуллину за постановку задачи и внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила
6 VII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Р. Сибгатуллин, ЖЭТФ, т. 66, № 4, 1187 (1974). ² F. J. Zerilli, Phys. Rev., v. D2, 2141 (1970). ³ F. J. Zerilli, Phys. Rev. Letters, v. 24, 737 (1970). ⁴ M. Davis, R. Ruffini et al., Phys. Rev. Lett., v. 27, 1466 (1971). ⁵ M. Davis, R. Ruffini, J. Tiomno, Phys. Rev., v. D5, № 12 (1972). ⁶ R. Ruffini, Phys. Rev., v. D7, № 4 (1973). ⁷ M. Jonston, R. Ruffini, M. Peterson, Lett. Nuovo Cimento, v. 9, 219 (1974). ⁸ F. J. Zerilli, Phys. Rev., v. D9, 861 (1974). ⁹ T. Regge, J. A. Wheeler, Phys. Rev., v. 108, 4063 (1957). ¹⁰ S. A. Teukolsky, Phys. Rev. Lett., v. 29, 16 (1972). ¹¹ V. Moncrief, Phys. Rev., v. D9, № 10, 2707 (1974). ¹² Н. Р. Сибгатуллин, Г. А. Алексеев, ЖЭТФ, т. 67, № 10, 1234 (1974). ¹³ Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, «Наука», 1967.