

С. Х. АРАНСОН

О НЕКОТОРЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ДВУМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 4 XI 1974)

В ⁽¹⁾ введено понятие гомотопического класса вращения полутраектории динамической системы (A) , заданной на связном ориентируемом двумерном многообразии M^2 рода $p > 1$, являющееся аналогом числа вращения Пуанкаре для динамических систем на двумерном торе T^2 . Как известно, на T^2 по любому иррациональному числу μ всегда можно построить динамическую систему, содержащую незамкнутую устойчивую по Пуассону полутраекторию, число вращения Пуанкаре которой есть μ . Однако, как устанавливается в настоящей статье, гомотопический класс вращения на $M^2 \neq T^2$ таким свойством не обладает.

Пусть на связном замкнутом ориентируемом двумерном многообразии M^2 рода $p > 1$ задана гладкая или аналитическая динамическая система (A) . Рассмотрим для M^2 универсальное накрытие $\bar{M}^2$, являющееся плоскостью Лобачевского в реализации Пуанкаре на внутренности круга $|z| < 1$ комплексной z -плоскости. Известно ^(2, 3), что тогда M^2 представимо в виде $\bar{M}^2/\Gamma$, где Γ — дискретная группа неевклидовых переносов, изоморфная фундаментальной группе многообразия M^2 , и каждый элемент $\gamma \in \Gamma$, отличный от единичного, имеет ровно две неподвижные точки: устойчивую γ^+ и неустойчивую γ^- , лежащие на абсолюте $|z| = 1$. Множество неподвижных точек всех элементов группы Γ , отличных от единичного, называется множеством рациональных точек, а дополнение на абсолюте к этому множеству — множеством иррациональных точек.

Лемма. Пусть γ — любой элемент группы Γ и $[a, b]$ — произвольная дуга на абсолюте, не содержащая неподвижных точек γ^- , γ^+ элемента γ и такая, что направление на этой дуге от точки a к точке b совпадает с положительным обходом абсолюта (обход против часовой стрелки).

Тогда существуют элементы γ_1, γ_2 группы Γ , сопряженные с элементом γ , т. е. $\gamma_1 = g_1 \circ \gamma \circ g_1^{-1}$, $\gamma_2 = g_2 \circ \gamma \circ g_2^{-1}$, $g_1 \in \Gamma$, $g_2 \in \Gamma$ такие, что:

1) неподвижные точки γ_i^- , γ_i^+ элемента γ_i , $i = 1, 2$, являются внутренними точками дуги $[a, b]$;

2) на дуге $[a, b]$ неподвижные точки элемента γ_1 имеют порядок $a, \gamma_1^-, \gamma_1^+, b$, а неподвижные точки элемента γ_2 — порядок $a, \gamma_2^+, \gamma_2^-, b$.

Доказательство леммы непосредственно следует из свойств группы γ ⁽⁴⁾.

Обозначим через $(\bar{A})$ систему на $\bar{M}^2$, накрывающую систему (A) , и через $L^{(1)}, l^{(1)}$ — полутраектории систем (A) и $(\bar{A})$ такие, что $L^{(1)} = \pi(l^{(1)})$, где π — проекция $\bar{M}^2$ на M^2 . Пусть $\sigma(l^{(1)})$ — множество всех предельных точек полутраектории $l^{(1)}$, принадлежащих абсолюту. Следуя ⁽¹⁾, будем называть множество $\mu(L^{(1)}) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\sigma(l^{(1)}))$ гомотопическим классом вращения полутраектории $L^{(1)}$ системы (A) .

Теорема. Существует множество иррациональных точек G мощности континуума, заданное на абсолюте и всюду плотное на нем, такое, что, какую бы динамическую систему (A) на M^2 ни взять, любая ее полутраектория, имеющая в своем предельном множестве незамкнутую устойчивую по Пуассону полутраекторию, не имеет точек множества G в своем гомотопическом классе вращения.

Доказательство. Обозначим через $\{\gamma_i\}$, $i=1, 2, 3, \dots$, все элементы группы Γ , для которых каждый элемент $\gamma_i \in \{\gamma_i\}$ имеет ось S_i (т. е. дугу окружности, ортогональную абсолюте и проходящую через неподвижные точки γ_i^- , γ_i^+ элемента γ_i), образ которой $\Sigma_i = \pi(S_i)$ при однократном обходе является простой замкнутой кривой, не гомотопной нулю на M^2 (известно, что таких элементов счетное множество ⁽⁵⁾). Будем обозначать через D^+ (D^-) область на $\bar{M}^2$, остающуюся справа (слева) от оси S любого элемента γ при движении по S от точки γ^- к точке γ^+ , и через E^+ (E^-) — дугу абсолюта, входящую в границу области D^+ (D^-). При этом, если элемент группы Γ употребляется с индексами, то для D^+ (D^-) и E^+ (E^-) будем употреблять те же индексы.

Выполним следующие построения:

1) Рассмотрим множество $N_1 = \{\gamma_1\}$ и обозначим через $[a_{111}, b_{111}]$ дугу на абсолюте, не содержащую неподвижных точек γ_1^- , γ_1^+ элемента γ_1 и такую, что направление обхода на этой дуге от точки a_{111} к точке b_{111} совпадает с положительным обходом абсолюта и $|a_{111} - b_{111}| < 1/2$. В силу леммы существует элемент $\xi_{111} \in \Gamma$, сопряженный с элементом $\gamma_1 \in N_1$, такой, что его неподвижные точки ξ_{111}^- , ξ_{111}^+ являются внутренними точками

дуги $[a_{111}, b_{111}]$ (откуда $|\xi_{111}^- - \xi_{111}^+| < 1/2$) и при положительном обходе аб-

солюта имеется следующий порядок точек: a_{111} , ξ_{111}^- , ξ_{111}^+ , b_{111} .

2) Рассмотрим множество $N_2 = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ и выполним следующие построения:

2.1) Выберем на абсолюте непересекающиеся дуги $[a_{211}, b_{211}]$, $[a_{212}, b_{212}]$, целиком лежащие внутри дуги E_{111}^+ , направления на которых от точки a_{211} к точке b_{211} и от точки a_{212} к точке b_{212} совпадают с положительным обходом абсолюта, причем эти дуги не содержат неподвижных точек γ_1^- , γ_1^+ элемента $\gamma_1 \in N_2$ и $|a_{211} - b_{211}| < 1/4$, $|a_{212} - b_{212}| < 1/4$. В силу леммы существуют элементы ξ_{211} , ξ_{212} группы Γ , сопряженные с элементом $\gamma_1 \in N_2$ такие, что неподвижные точки ξ_{211}^- , ξ_{211}^+ элемента ξ_{211} являются

внутренними точками дуги $[a_{211}, b_{211}]$, а неподвижные точки ξ_{212}^- , ξ_{212}^+ элемента ξ_{212} являются внутренними точками дуги $[a_{212}, b_{212}]$ и при положительном обходе абсолюта порядок точек следующий: a_{211} , ξ_{211}^- , ξ_{211}^+ , b_{111} и a_{212} , ξ_{212}^- , ξ_{212}^+ , b_{212} . Поскольку $|a_{211} - b_{211}| < 1/4$, $|a_{212} - b_{212}| < 1/4$, то $|\xi_{211}^- - \xi_{211}^+| < 1/4$ и $|\xi_{212}^- - \xi_{212}^+| < 1/4$.

2.2) Выберем на абсолюте непересекающиеся дуги $[a_{221}, b_{221}]$, $[a_{222}, b_{222}]$, целиком лежащие внутри дуг E_{211}^- , E_{212}^- соответственно так, что направления на них от точки a_{221} к точке b_{221} и от точки a_{222} к точке b_{222} совпадают с положительным обходом абсолюта, и эти дуги не содержат неподвижных точек γ_2^- , γ_2^+ элемента $\gamma_2 \in N_2$. Аналогично случаю 2.1) найдем элементы ξ_{221} , ξ_{222} группы Γ , сопряженные с элементом $\gamma_2 \in N_2$ такие, что при положительном обходе абсолюта порядок точек следующий: a_{221} , ξ_{221}^- , ξ_{221}^+ ,

b_{221} и a_{222} , ξ_{222}^- , ξ_{222}^+ , b_{222} .

Таким образом, из построений следует:

$$a_1) \quad D_{221}^- \subset D_{211}^-, \quad D_{222}^- \subset D_{212}^-;$$

$$a_2) \quad D_{211}^- \cap D_{212}^- = \emptyset, \quad D_{211}^- \cap D_{222}^- = \emptyset, \quad D_{221}^- \cap D_{212}^- = \emptyset, \quad D_{221}^- \cap D_{222}^- = \emptyset;$$

$$a_3) D_{211}^- \subset D_{111}^+, \quad D_{212}^- \subset D_{111}^+;$$

$$a_4) |\xi_{111}^- - \xi_{111}^+| < 1/2, \quad |\xi_{211}^- - \xi_{211}^+| < 1/4, \quad |\xi_{212}^- - \xi_{212}^+| < 1/4, \quad |\xi_{221}^- - \xi_{221}^+| < 1/4, \\ |\xi_{222}^- - \xi_{222}^+| < 1/4.$$

Продолжая описанную процедуру для множеств $N_3 = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$, $N_4 = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4\}, \dots$, находим в результате множество

$$\xi_{i_1, i_2, i_3}, \quad i_1 = 1, 2, 3, \dots; \quad i_2 = 1, 2, 3, \dots, i_1; \quad i_3 = 1, 2, 3, \dots, 2^{i_1-1},$$

элементов группы Γ такое, что каждый элемент ξ_{i_1, i_2, i_3} сопряжен с элементом $\gamma_{i_2} \in \Gamma$ и выполняются следующие свойства:

$$b_1) D_{i_1, i_2', i_3}^\alpha \subset D_{i_1, i_2'', i_3}^\alpha, \quad \text{если } 1 \leq i_2'' < i_2' \leq i_1;$$

$$b_2) D_{i_1, i_2', i_3}^\alpha \cap D_{i_1, i_2'', i_3}^\alpha = \emptyset, \quad \text{если } i_3' \neq i_3'';$$

$$b_3) D_{i_1+1, 1, i_3}^{-\alpha} \subset D_{i_1, i_1, \left[\frac{i_3+1}{2}\right]}^\alpha;$$

$$b_4) |\xi_{i_1, i_2, i_3}^- - \xi_{i_1, i_2, i_3}^+| < 1/2 \cdot i_1.$$

Здесь α есть $+$ ($-$), если i_1 , нечетно (четно), и $[a]$ — целая часть a .

Таким образом получаем бесконечные последовательности вложенных

одна в другую областей D_{i_1, i_2, i_3}^α , ограниченных дугами абсолюта и осями

S_{i_1, i_2, i_3} , и каждая такая последовательность в силу свойств $b_1) - b_4)$ определяет единственную предельную точку на абсолюте. Обозначим полученное множество предельных точек через G' . Покажем, что G' имеет мощность континуума. Действительно, в силу свойств $b_1) - b_4)$ имеем, что любая последовательность целых чисел $i_3^{(1)}, i_3^{(2)}, \dots, i_3^{(n)}, \dots$ ($i_3^{(1)} = 1;$

$[1/2(i_3^{(n+1)} + 1)] = i_3^{(n)}$; $n = 1, 2, 3, \dots$) соответствует последовательности вложенных одна в другую областей

$$D_{11i_3^{(1)}}^+ \supset D_{21i_3^{(2)}}^- \supset D_{31i_3^{(3)}} \supset \dots \supset D_{n1i_3^{(n)}}^{\alpha_n} \supset \dots, \quad (*)$$

имеющих своей предельной точкой точку из множества G' , причем разным последовательностям соответствуют разные точки из G' , где α_n есть $+$ ($-$), если n нечетно (четно). Поскольку множество всех таких последовательностей целых чисел имеет мощность континуума, то и G' имеет мощность континуума.

Обозначим через G множество вида $G = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(G' \setminus R_1)$, где R_1 — множе-

ство всех рациональных точек на абсолюте, лежащих в G' . Покажем, что G — искомое множество. Действительно, в силу (*) множество G всюду плотно на абсолюте. Осталось показать, что у любой системы (A) на M^2 не существует ни одной полутраектории, которая имеет в своем предельном множестве незамкнутую устойчивую по Пуассону полутраекторию и для которой хотя бы одна точка из множества G входит в ее гомотопический класс вращения.

Предположим противное, т. е. существует точка $z_0 \in G$ и система (A) на M^2 , полутраектория $L^{(1)}$ которой имеет среди своих предельных точек незамкнутую устойчивую по Пуассону полутраекторию и содержит точку z_0 в своем гомотопическом классе вращения. Поскольку $z_0 \in G$, то всегда найдется элемент $\gamma' \in \Gamma$ такой, что точка $z_0' = \gamma'(z_0)$ принадлежит мно-

жеству $G' \setminus R_1$. Но тогда из определения гомотопического класса вращения следует, что у системы $(\bar{A})$ на $\bar{M}^2$, накрывающей систему (A) , всегда найдется такая полутраектория $l^{(1)}$, являющаяся прообразом $L^{(1)}$, что z_0' входит в ее предельное множество. В силу теоремы 1 из ⁽¹⁾, точка z_0' является тогда единственной предельной точкой полутраектории $l^{(1)}$.

Обозначим через X негомотопную нулю простую замкнутую кривую, являющуюся для траекторий системы (A) кривой без контакта и такой, что $X \cap L^{(1)} \neq \emptyset$ (существование кривой X следует из леммы 3 работы ⁽⁶⁾). В силу выбора множества $\{\gamma_i\}$, $i=1, 2, 3, \dots$, получаем, что всегда найдется элемент $\gamma_r \in \{\gamma_i\}$ такой, что один из прообразов $\tilde{S}$ кривой X имеет граничными точками точки γ_r^- , γ_r^+ и $\tilde{S}$ инвариантен при действии элемента γ_r . Из доказанного выше следует, что при заданном $r \geq 1$ существует такая последовательность вложенных одна в другую областей

$$\tilde{D}_{r, r, i_3^{(1)}}^{\alpha_1} \supset \tilde{D}_{r+1, r, i_3^{(2)}}^{\alpha_2} \supset \dots \supset \tilde{D}_{r+n-1, r, i_3^{(n)}}^{\alpha_n} \supset \dots \quad (**)$$

имеющая z_0' своей единственной предельной точкой, что область

$\tilde{D}_{r+n-1, r, i_3^{(n)}}^{\alpha_n}$ лежит — в зависимости от значения плюс или минус индекса α_n — справа или слева от кривой $\tilde{S}_{r+n-1, r, i_3^{(n)}}$, являющейся прообразом

кривой X и имеющей своими граничными точками неподвижные точки элемента $\xi_{r+n-1, r, i_3^{(n)}}$, причем $\xi_{r+n-1, r, i_3^{(n)}}$ сопряжен с элементом γ_r и индекс α_n есть $+$ ($-$), если $r+n-1$ нечетно (четно). Но тогда существует $n_0 > 0$ столь большое, что $l^{(1)}$ пересекает $\tilde{S}_{r+n_0-1, r, i_3^{(n_0)}}$ и $\tilde{S}_{r+n_0, r, i_3^{(n_0+1)}}$.

Предположим, для определенности, что число $r+n_0-1$ нечетное (если $r+n_0-1$ четное, то доказательство аналогично). Поскольку $l^{(1)}$ — полутраектория системы $(\bar{A})$ и $\tilde{S}_{r+n_0-1, r, i_3^{(n_0)}}$, $\tilde{S}_{r+n_0, r, i_3^{(n_0+1)}}$ — кривые без контакта системы $(\bar{A})$, то фазовая точка $z(t)$ на полутраектории $l^{(1)}$ при движении к точке z_0' , начиная от точки $z(t_1) = l^{(1)} \cap \tilde{S}_{r+n_0-1, r, i_3^{(n_0)}}$, сначала попадает в

область $\tilde{D}_{r+n_0-1, r, i_3^{(n_0)}}^+$, а затем, после достижения точки $z(t_2) = l^{(1)} \cap$

$\tilde{S}_{r+n_0, r, i_3^{(n_0+1)}}$, в область $\tilde{D}_{r+n_0, r, i_3^{(n_0+1)}}^+ \subset \tilde{D}_{r+n_0-1, r, i_3^{(n_0)}}^+$. В силу выбора последо-

вательности $(**)$ и нечетности числа $r+n_0-1$ имеем, что $\tilde{D}_{r+n_0, r, i_3^{(n_0+1)}}^- \subset$

$\tilde{D}_{r+n_0-1, r, i_3^{(n_0+1)}}^+$, что противоречит только что полученному условию

$$\tilde{D}_{r+n_0, r, i_3^{(n_0+1)}} \subset \tilde{D}_{r+n_0-1, r, i_3^{(n_0)}}. \quad \text{Теорема доказана.}$$

Используя теорему 6 из ⁽⁷⁾ и лемму 2 из ⁽¹⁾ получаем

Следствие. Точки множества G не могут входить в гомотопический класс вращения никаких полутраекторий любых систем на M^2 , имеющих конечное число состояний равновесия и конечное число сепаратрис.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и кибернетики
при Горьковском государственном университете
им. Н. И. Лобачевского

Поступило
22 X 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Х. Арансон, В. З. Гринес, Матем. сб., т. 90 (132), № 3, 372 (1973). ² Л. Р. Форд, Автоморфные функции, М.—Л., 1936. ³ Д. Спрингер, Введение в теорию римановых поверхностей, М., 1960. ⁴ J. Nielsen, Abhandl. math. Seminar Hamburg. Univ., B. 3, № 1, 246 (1924). ⁵ K. Tetuo, A. Kiyoshi, K. Fumio, J. Fac. Sci. Niigata Univ., Ser. 1, v. 4, № 3, 131 (1963). ⁶ С. Х. Арансон, Матем. сб., т. 76 (118), № 2, 214 (1968). ⁷ А. Г. Майер, там же, т. 12 (54), 71 (1943).