

Р. И. ПИМЕНОВ

**К ОСНОВАНИЯМ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОГО
ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ**

(Представлено академиком А. Д. Александровым 25 X 1974)

В ^(1, 2) предложена формализация теории пространства-времени в виде структуры рода $(M, T, <)$, где M — множество, T — топология, $<$ — следование (отношение рода порядка). Мы покажем, что для получения пространства-времени общей теории относительности, т. е. псевдоримановой геометрии $n-1V_n$, излишне дополнительно задавать метрику (g_{ij}) , а достаточно наложить некоторые условия на пучок F дифференцируемых функций, задаваемых на (M, T) , после чего следование $<$ однозначно с точностью до множителя порождает псевдориманову метрику (g_{ij}) , точно согласующуюся с $<$.

В дальнейшем через \mathfrak{M} обозначаем структуру рода $(M, T, <, F)$, которая как структура $(M, T, <)$ является топологической кинематикой. По определению ^(1, 2) это означает, в частности, что для любой $p \in M$ найдется окрестность $U \in T$, в которой однозначно задано отношение $<^*$, причем будущее $a^+ = \{x | a < x\}$ и прошлое $a^- = \{x | x < a\}$ открыты для каждой $a \in U$. Как структура рода (M, T, F) наше \mathfrak{M} предполагается гладким (бесконечно дифференцируемым) n -многообразием, где F — его пучок гладких вещественных функций $F = \bigcup_{p \in M} F(M, p)$. Гладкость и следование связаны между собой свойствами (аксиомами) конуса изотонных функций, о которых речь пойдет ниже. Говорим, что $f \in F$ изотонна в точке p (обозначаем $f \in F^+(M, p)$, или $f \in F^+$), если найдется такая окрестность U точки p , что из $x < y$ следует $fx < fy$ для всех $x, y \in U$; аналогично определяем F^- .

Вводим в F топологию C^1 .

Аксиома 1. $\forall p \text{ int } F^+(M, p) \neq \emptyset$.

Аксиома 2. $\forall p \text{ int } F^+(M, p) \cap \text{int } F^-(M, p) \subset \{\text{const}\}$.

Аксиома 3. У всякой $p \in M$ есть такая окрестность U , что при $a, b \in U$ & $a \in \overline{b^+}$ & $b \notin \overline{a^+}$ найдется $f \in \text{int } F^+$ такая, что $fa = 0$ & $fb = 1$, каковы бы ни были a и b .

В касательном пространстве $T_p \mathfrak{M}$ вводим конус

$$X > 0 \Leftrightarrow X \in \text{int } \{Y | \forall f \in \overline{\text{int } F^+} \Rightarrow Yf(p) \geq 0\}. \quad (1)$$

Структуру \mathfrak{M} с аксиомами 1, 2 называем гладкой кинематикой, а если выполнены аксиомы 1—3 и всякий достаточно малый интервал $a^+ \cap b^-$ связан, то — точной гладкой кинематикой.

Теорема 1. Если \mathfrak{M} — гладкая кинематика, то ее касательное пространство является эйнштейновой векторной кинематикой относительно (1). На \mathfrak{M} существует глобальное гладкое векторное поле с положительными в смысле (1) векторами.

Первая часть теоремы проверяется непосредственным применением определений ⁽²⁾; кокасательное пространство $T_p \mathfrak{M}$ также оказывается эйн-

* Точнее, $<^*$, но о согласовании порядков на пересечениях и прочие аксиомы см. ^(1, 2).

штейновой векторной кинематикой относительно порядка

$$A > 0 \Leftrightarrow \exists f A = df \ \& \ f \in \text{int } F^+(\mathfrak{M}, p).$$

Существование векторного поля следует из того, что расслоение $(M, \text{rg}, \bigcup_{p \in M} O^+(p))$ имеет стягиваемый слой (конус O^+ с острой вершиной), а потому ⁽³⁾ имеет сечение. Гладкая кинематика всегда эйнштейнова. Обратное неверно, например, 1V_2 с (вырожденной) метрикой $ds^2 = dt^2 - 4|t|dx^2$.

Аксиома 2 следует из более изящного постулата

$$\overline{\text{int } F^+(M, p)} \subset F^+(M, p) \cup \{\text{const}\},$$

но сам он не выполняется для многих псевдоримановых пространств; например, при метрике (без особенностей) $ds^2 = dt^2 - e^{-2t}dx^2$; ср. также следовании

$$(t, x) < (t', x') \Leftrightarrow t' - t > \log(1 + |x' - x|).$$

Из аксиомы 2 следует, что

$$\text{int}(F(M, p) \setminus (F^+(M, p) \cup F^-(M, p))) \neq \emptyset,$$

но не наоборот. Пример: метрика $ds^2 = dt^2 dx^2 - t^2 dy^2$.

Назовем путь $\gamma: [0, 1] \rightarrow (M, T, <)$ изотонным, если для достаточно близких s и s' выполняется $s < s' \Rightarrow \gamma s < \gamma s'$, и предельно-изотонным, если $s < s' \Rightarrow \gamma s' \in (\gamma s)^+$. Касательную вдоль пути γ обозначаем X_γ .

Теорема 2. В гладкой кинематике для гладкого предельно-изотонного пути $X_\gamma \in O^+ \setminus 0$.

Теорема 3. В локально интервально-связной точной гладкой кинематике локально справедлива эквивалентность

$$a < b \Leftrightarrow \exists \gamma (\forall p \ p \in \gamma \Rightarrow X_\gamma(p) \in O^+(p)).$$

Пример, где нарушается аксиома 3 (и импликация \Leftarrow), дается метрикой

$$ds^2 = (1 + {}^1/{}_3(x^2 - x^1)^{-2/3})dx^1{}^2 + dx^1 dx^2 - {}^1/{}_3(x^2 - x^1)^{-2/3}dx^2{}^2.$$

Интервальная связность (и импликация \Rightarrow) нарушается в гладкой кинематике со следованием $t' - t > \log(1 + |x' - x|)$.

Конус $\overline{O^+} \subset T_p \mathfrak{M}$ не обязан быть эллиптическим; условия эллиптичности см. (¹, ⁴⁻⁶). Нам кажется весьма важным развить последовательную физическую интерпретацию теории точных гладких кинематик без предположения об эллиптичности конуса; такая теория моделирует возможную локальную анизотропию пространства-времени или пространства импульса-энергии. Эта анизотропия может быть распределена случайным образом и в среднем не проявляется.

Пусть γ — изотонный путь, $a = \gamma s_0$, $0 < s_0 < 1$. Говорим, что событие x одновременно a относительно γ , если найдется $s > 0$, $s < s_0$, $1 - s_0$ такое, что $\gamma(s_0 - s) \in \partial x^-$ & $\gamma(s_0 + s) \in \partial x^+$. Это радарное определение одновременности по Эйнштейну, см. (², ⁷). Обозначим $H(\gamma, a)$ множество всех событий, одновременных a относительно γ . Вообще говоря, оно не является гладкой гиперповерхностью, т. е. не имеет касательной гиперплоскости в точке a .

Теорема 4. Пусть в точной гладкой кинематике для любого изотонного гладкого пути γ в любой его точке можно указать такую параметризацию пути, что относительно нее $H(\gamma, a)$ имеет касательную гиперплоскость в a .

Тогда $(T_p \mathfrak{M}, <)$ относительно (1) является лоренцевой кинематикой, т. е. конус O^+ эллиптический.

Доказательство опирается на критерий эллиптичности, указанный А. Д. Александровым в (⁴): пересечение границы конуса будущего с гра-

ницей конуса прошлого содержится в гиперплоскости при любом расположении вершин. Теорема 4 является некоторым аргументом в дискуссии (⁷, ⁸) относительно «существенной конвенциональности» в определении одновременности: если мы хотим, чтобы собственное пространство было гладким, то от «существенной конвенциональности» приходится отказаться.

В условиях теоремы 4 в каждой точке $p \in M$ однозначно, с точностью до множителя, задается тензор (g_{ij}) сигнатуры $(+, -, \dots, -)$; он определяется уравнением, задающим эллиптический конус. Если фиксировать в точке какой-нибудь один вектор (например, поле, упоминаемое в теореме 1) в качестве единичного, то (g_{ij}) задается однозначно. Конечно, гладкости ни из чего не следует. Эта ситуация близка «тетрадному подходу», см. (⁹).

Пусть γ — изотонный путь, а $f_\gamma: (\gamma 0)^+ \cap (\gamma 1)^- \rightarrow (0, 1)$ — отображение по правилу $f_\gamma x = s$ равносильно $\gamma s \in \partial x^+$; тривиально проверяется, что f_γ — функция и изотонная.

Теорема 5. Если в точной гладкой кинематике f_γ гладкая для любого гладкого пути γ , то расслоение $(M, \text{rg}, \bigcup_{p \in M} O^+(p))$, где $O^+(p) \subset T_p M$, гладкое. Сам конус ∂O^+ также гладкий во всех своих точках, кроме вершины O .

Теорема 6. У каждой точки p псевдориманова пространства ${}^{n-1}V_n$ можно указать окрестность, являющуюся интервально-связной точной гладкой кинематикой относительно следования, определенного как в теореме 4; эти окрестности согласованы в смысле (¹).

Выражаю признательность акад. А. Д. Александрову, С. Н. Белову, В. Я. Крейнвичу и Я. М. Элиашбергу за полезные обсуждения отдельных пунктов теорем этой статьи.

Автор с глубокой благодарностью вспоминает акад. В. И. Смирнова, представлявшего в ДАН первоначальный вариант этой статьи.

Коми филиал Академии наук СССР
Сыктывкар

Поступило
19 X 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ H. Busemann, Timelike Spaces, Diss. Math., Warszawa, 1967, p. 53. ² P. И. Пименов, Пространства кинематического типа (математическая теория пространства-времени), «Наука», Ленинград, 1968; R. I. Pimenov, Kinematic Spaces, N. Y., 1970. ³ H. Стинрод, Топология косых произведений, М., 1953. ⁴ A. D. Aleksandrov, Canad. J. Math., v. 19, 1119 (1967). ⁵ O. S. Rothaus, Proc. Am. Math. Soc., v. 17, № 6, 1284 (1966). ⁶ А. Д. Александров, Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 128, № 3 (1972). ⁷ A. Grünbaum, W. C. Salmon, Phil. Sci., v. 36, № 1, 1 (1969). ⁸ А. А. Тяпкин, В сб.: Физическая наука и философия, М., 1973, стр. 281. ⁹ H.-J. Treder, Gravitationstheorie und Äquivalenzprinzip, Berlin, 1971.