Доклады Академии наук СССР
1975. Том 222, № 1

УДК 513.82+511 *МАТЕМАТИКА*

С. С. РЫШКОВ, Е. П. БАРАНОВСКИЙ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О НАИМЕНЕЕ ПЛОТНОМ РЕШЕТЧАТОМ ПОКРЫТИИ 5-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА РАВНЫМИ ШАРАМИ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 29 X 1974)

1°. Пусть в эвклидовом пространстве E^n задана точечная решетка Г и каждая ее точка является центром шара радиуса R. Если R — минимальный радиус, при котором такая система шаров покрывает пространство E^n, то ее называют решетчатым покрытием пространства E^n равными шарами, соответствующим решетке Г, а радиус R называют радиусом покрытия решетки Г. Отношение $\theta(\Gamma)$ объема шара радиуса R к объему фундаментальной области решетки Г называется плотностью соответствующего покрытия.

Теорема T_n. *Минимум плотности решетчатого покрытия равными шарами пространства E^n при $n\leqslant 5$ достигается на решетке Γ_n, имеющей в качестве метрической формы одного из основных реперов «главную форму первого типа Вороного».*

$$\sum_{i=1}^{n} nx_i^2-\sum_{\substack{i,j=1\\(i=j)}}^{n} x_ix_j.$$

Этот минимум равен $\theta_n=\Omega_n\left[\frac{n(n+2)}{12(n+1)}\right]^{n/2}\sqrt{n+1}$, *где через* Ω_n *обозначен объем n-мерного шара единичного радиуса.*

При $n=2$, 3, 4 теорема T_n впервые доказана в работах ([1-3]), см. также ([4], [5]). Доказательство теоремы T_n при $n=5$ является основным результатом настоящей заметки.

Известно, что теорема T_n не имеет места при больших значениях n; в частности ([6]), она не имеет места при четных $n\geqslant 114$ и всех $n\geqslant 200$. Интересно было бы найти наименьшую размерность n, для которой эта теорема неверна.

Уже первые работы, посвященные исследованию плотности решетчатых покрытий, показали, какую важную роль в таких исследованиях играет знание комбинаторно-метрической структуры L-разбиений ([7], [8]) решеток покрытия. Особенно отчетливо это стало видно после работ ([9-11]) и работ, посвященных случаю $n=4$. В работе ([12]) Барнс и Диксон показали, что в каждом L-типе может встретиться не более одного локального минимума плотности покрытия. Простая геометрическая картина этого результата дана в ([13]). Отысканию локальных минимумов плотности покрытия L-типов пространства E^5 по комбинаторно-метрической структуре L-разбиений решеток этих типов посвятил часть своей диссертации Тренерри ([14]). Однако из-за вычислительных трудностей (несмотря на использование ЭВМ) ему не удалось решить эту задачу даже для тех далеко не всех L-типов пространства E^5, структуру L-разбиений которых он нашел.

Путь к доказательству теоремы T_n при $n=5$, т. е. к решению названной в заглавии задачи, оказался открытым после того, как нами были перечислены и исследованы ([15], [16]) L-типы примитивных решеток при $n=5$. При решении этой задачи мы не стремились найти локальные минимумы плотности в каждом типе, а только показывали, что эти минимумы превышают плотность покрытия названной в теореме решетки Γ_5.

Мы предполагаем, что читателю известно содержание работ ([15], [16]).

2°. Лемма 1. *Пусть в L-разбиении 5-мерной решетки содержится симплекс, объем которого в 2 раза превышает объем основного симплекса решетки. Тогда плотность покрытия для решетки Г больше, чем* θ_5.

Действительно, при единичном объеме основного параллелепипеда решеток у решетки Γ_n радиус покрытия $R_n=(n+1)^{1/(2n)}\sqrt{\dfrac{n(n+2)}{12(n+1)}}$ а радиус шара, описанного вокруг правильного симплекса, имеющего объем в 2 раза больший объема $V=1/n!$ основного симплекса решетки, равен $r_n=2^{1/n}(n+1)^{-1/2n}\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$, и при $n\leqslant 5$ имеет место неравенство $R_n<r_n$.

Как показано в ([16]), области 221 L-типа 5-мерных решеток распределены в областях R, R_1, R_2 приведения по совершенным формам следующим образом: область R совпадает с областью первого типа Вороного, область R_1 разбивается на области 199 L-типов, область R_2 разбивается на области 21 L-типа. Так как L-разбиения всех решеток, соответствующих внутренним точкам области R_2, содержат симплекс, объем которого превышает объем основного симплекса в 2 раза ([16а]), то из леммы 1 получаем

Следствие. *Плотности покрытия для решеток 21 L-типа, области которых содержатся в области* R_2, *больше чем плотность* θ_5.

В ([16б]) мы разделили 199 L-типов, соответствующих области R_1, на ключевые и отклоненные.

Лемма 2. *Плотность покрытия для всякой решетки, принадлежащей отклоненному L-типу, больше, чем* θ_5.

В ([16б]) описано шесть симплексов $S_{ij}^2-S_{ij}^4$, $S_{ji}^2-S_{ji}^4$, содержащихся в L-разбиении всякой решетки, принадлежащей отклоненному L-типу. Находим радиусы R_q, $q=1,\ldots,6$, шаров, описанных вокруг этих симплексов, и вычисляем наименьшее значение функции

$$\varphi=\frac{\Omega_5}{V}\left(\frac{1}{6}\sum_{q=1}^{6}R_q^2\right)^{5/2},$$

где V — объем основного параллелепипеда решетки. Лемма 2 вытекает из того, что найденное наименьшее значение $^8/_{15}\pi^2\cdot 0{,}408\ldots$ функции φ больше, чем $\theta_5={}^8/_{15}\pi^2\cdot 0{,}403\ldots$.

Следствие. *Решетки пространства* E^5, *плотность покрытия для которых меньше или равна* θ_5, *могут находиться только в ключевых L-типах.*

3°. Прежде чем переходить к рассмотрению ключевых L-типов, остановимся на одном методе оценки плотности покрытия, основанном на применении теоремы Штейнера о центральном моменте ([10], [11]). На основе этой теоремы или непосредственно устанавливаем, что радиус r шара, описанного вокруг n-мерного симплекса, удовлетворяет неравенству $r^2\geqslant\dfrac{1}{(n+1)^2}\sigma$,

где σ — сумма квадратов длин всех ребер симплекса. На основе последнего неравенства и неравенства

$$R^2\geqslant\frac{1}{p}\sum_{\lambda=1}^{p}r_\lambda^2,$$

в котором суммируются квадраты радиусов шаров, описанных вокруг всех попарно негомологических L-симплексов решетки Г, зная векторы смежности $\bar{a}_\nu$, $\nu=1,\ldots,s$, и строение звезды L-разбиения решетки Γ данного L-типа, получаем оценку ([11]) вида

$$\theta(\Gamma)\geqslant\Omega_n\left(\Delta^{-1/n}\sum_{\nu=1}^{s}q_\nu\bar{a}_\nu^{\,2}\right)^{n/2},$$

где q_ν, $\nu=1,\ldots,s$,— некоторые положительные коэффициенты, определяемые комбинаторной структурой звезды L-разбиения и постоянные для всех решеток данного L-типа.

Отметим ([11], [17]), что в пространстве R^N, $N={}^1\!/_2n(n+1)$, коэффициентов a_{ij} квадратичных форм поверхность $\sum\limits_{\nu=1}^{s}q_\nu\bar{a}_\nu^{\,2}=M=\mathrm{const}$ есть плоскость $\sum\limits_{i,\,j=1}^{n}c_{ij}a_{ij}=M$, которая имеет единственную точку касания с эквидискриминантной поверхностью, причем эта точка инвариантна относительно группы автоморфизмов рассматриваемой области L-типа. В частности, отсюда и из выпуклости эквидискриминантной поверхности к началу координат следует единственность минимума функции $\Delta^{-1/n}\sum\limits_{i,\,j=1}^{n}c_{ij}a_{ij}=Y(\Gamma)$.

Как легко посчитать, воспользовавшись, например, методом Лагранжа, минимум функции $Y(\Gamma)$ равен $n(\det(c_{ij}))^{1/n}$.

Из сказанного вытекает, что для каждого L-типа на основе комбинаторной структуры L-разбиений решеток этого типа однозначно находится число $C=\det(c_{ij})$ и имеет место

Предложение 1. *Если для данного L-типа число $C=\det(c_{ij})$ таково, что $\theta_n<\Omega_n n^{n/2}C^{1/2}$, то плотность покрытия $\theta(\Gamma)$ любой решетки Γ этого L-типа больше, чем θ_n.*

Пример. Рассмотрим L-тип, описанный в работе ([11]) и названный там IV типом. Там же ([11]) вычислено значение коэффициентов c_{ij} функции $\sum\limits_{i,\,j=1}^{n}c_{ij}a_{ij}$ для этого типа:

$$c_{ii}=\frac{n+2}{6(n+1)},\quad c_{ij}=\frac{n+2}{12(n+1)},\quad i\neq j;\quad ij\neq 12, 23,$$

$$c_{12}=\frac{n+2}{12(n+1)}-\frac{3}{2n(n^2-1)}\qquad c_{23}=\frac{n+2}{12(n+1)}-\frac{1}{2n(n+1)^2}$$

Вычислив

$$\det(c_{ij})=\left[\frac{n+2}{12(n+1)}\right]^n\left[n+1+\frac{24}{n(n+2)(n^2-1)}\left(2n+1-3\frac{5n^2+5n+2}{n^3+3n^2+2n}\right)\right]$$

на основе предложения 1 устанавливаем, что при размерностях $n\geqslant5$ (только при таких размерностях существует тип IV) решетки IV типа дают плотности покрытия пространства E^n большие, чем решетка Γ_n. (Последнее утверждение доказано в ([11]) только при $n\geqslant6$; для $n=5$ оно доказано в ([14]) при помощи непосредственного вычисления минимума плотности на множестве решеток IV типа.)

4°. Лемма 3. *Плотность покрытия для всякой решетки, принадлежащей ключевому L-типу, больше, чем θ_5.*

Доказательство этой леммы для ключевых L-типов с номерами 8—81 (см. ([16б]), таблица II) проводится с помощью предложения 1, причем исследование значительно облегчается тем, что вся совокупность попарно негомологичных L-симплексов решеток ключевых L-типов получается из «блоков» только трех видов (см. ([16б]), леммы 1—3). Вычислив для каждого из блоков выражение $\sum c_{ij}a_{ij}$, суммированием таких выражений по блокам, соответствующим структуре данного L-типа, легко находим для каждого из ключевых L-типов функцию $Y(\Gamma)$ и значение $\det(c_{ij})$.

Что касается остальных ключевых типов 1—7, то для них неравенство предложения 1 не имеет места и лемма 3 доказывается другим путем. Локальный минимум типа 1 известен ([14]) и он больше θ_5; сравнительно легко находятся (из-за высокой симметричности областей типов) локальные минимумы типов 4 и 5; оба они больше θ_5. Тем самым для решеток типов 1, 4, 5 лемма 3 справедлива.

Доказательство леммы 3 для типов 2, 3, 6, 7 получается непосредственным (довольно тяжелым в вычислительном смысле) исследованием радиусов описанных шаров для некоторых из симплексов L-разбиения решеток этих типов.

В совокупности леммы 1—3 и дают доказательство теоремы T_n при $n=5$.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
27 IX 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *R. Kershner*, Am. J. Math., v. 61, № 3, 665 (1939). [2] *R. P. Bambah*, Proc. Nat. Inst. Sci. India, v. 20, 25 (1954). [3] *Б. Н. Делоне, С. С. Рышков*, ДАН, т. 152, № 3, 523 (1963). [4] *Е. П. Барановский*, ДАН, т. 164, № 1, 13 (1965); Сибирск. матем. журн., т. 7, № 4, 731; там же, № 5, 974 (1966). [5] *T. J. Dickson*, J. Austral. Math. Soc., v. 6, № 2, 179 (1966); v. 7, № 4, 490 (1967). [6] *С. С. Рышков*, ДАН, т. 175, № 2, 303 (1967). [7] *Г. Ф. Вороной*, Собр. соч., т. 2, Киев, 1952, стр. 239. [8] *Б. Н. Делоне*, УМН, № 3, 16 (1937); № 4, 102 (1938). [9] *M. N. Bleicher*, Canad. J. Math., v. 14, № 4, 632 (1962). [10] *А. Ф. Гамецкий*, ДАН, т. 146, № 5, 991 (1962); ДАН, т. 151, № 3, 482 (1963). [11] *С. С. Рышков*, ДАН, т. 162, № 2, 277 (1965). [12] *E. S. Barnes, T. J. Dickson*, J. Austral. Math. Soc., v. 7, № 1, 115 (1967). [13] *Б. Н. Делоне, Н. П. Долбилин и др.*, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 34, № 2, 289 (1970). [14] *D. W. Trenerry*, The Covering of Space by Spheres, Doctor Thesis, Adelaide, 1972. [15] *С. С. Рышков*, ДАН, т. 212, № 1, 46 (1973). [16] *Е. П. Барановский, С. С. Рышков*, а) ДАН, т. 212, № 3, 532 (1973); б) ДАН, т. 220, № 2, 265 (1975). [17] *С. С. Рышков*. Основные экстремальные задачи геометрии положительных квадратичных форм, Докт. дисс., М., 1970.