Доклады Академии наук СССР
1975. Том 222, № 1

УДК 517.955.213 *МАТЕМАТИКА*

Э. М. СААК

К ТЕОРИИ МНОГОМЕРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком И. Н. Векуа 24 X 1974)

По обобщению теории системы уравнений Коши — Римана (С.—R.) было предпринято две попытки. Первая из них вылилась в теорию обобщенно-аналитических функций ([1]), фундамент которой был заложен в работах И. Н. Векуа и Л. Берса; вторая — привела к пространственному аналогу интеграла типа Коши (([2]), стр. 242), найденному Гр. К. Моисилом и Н. Теодореску (М.—Т.) ([3]) (см. также ([4–6])). В настоящей работе строятся эллиптические системы уравнений, содержащие в себе системы С.—R. и М.—Т. как частные случаи. При этом приходится констатировать, что при $n>2$ решения эллиптических систем первого порядка по своим свойствам удаляются как от аналитических функций одного, так и от аналитических функций многих комплексных переменных.

Введем необходимые обозначения и определения. Через $\{e_{n,m}^{(i)}\}$ обозначается системы n унитарных квадратных матриц порядка m, абсолютные величины элементов которых равны нулю или единице.

Система $\{e_{n,m}^{(i)}\}$, обладающая указанными выше свойствами, называется гармонически сопряженной системой унитарных матриц (г.с.с.у.м.), если определитель

$$\det\sum_{i=0}^{n} x_i e_{n,m}^{(i)}\neq 0 \qquad \forall x\neq 0, \tag{1}$$

и выполняются соотношения

$$[e_{n,m}^{(i)}]^* e_{n,m}^{(j)}+[e_{n,m}^{(j)}]^* e_{n,m}^{(i)}=0, \quad i\neq j, \tag{2}$$

где $x=(x_1,\ldots,x_n)$ — вектор n-мерного эвклидова пространства R^n, звездочка означает транспонирование матрицы, $i, j=1, 2, \ldots, n$.

Матрице $e_{n,m}^{(i)}$ ставим в соответствие дифференциальную матрицу $e_{n,m}^{(i)}(\partial/\partial x_i)$, заменяя каждый элемент матрицы его произведением на оператор $\partial/\partial x_i$.

Если $\{e_{n,m}^{(i)}\}$ — г.с.с.у.м., то систему уравнений 1-го порядка эллиптического типа

$$\sum_{i=1}^{n} e_{n,m}^{(i)}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)u=0, \quad u=(u_1(x),\ldots,u_m(x)), \tag{3}$$

будем называть обобщенной системой Коши — Римана размерности (n, m) первого порядка.

Если заменить операторы $\partial/\partial x_i$ на дифференциальные операторы более высокого порядка, то придем к понятию обобщенной системы Коши — Римана размерности (n, m) высшего порядка.

Покажем прежде всего, что (М.—Т.)-система

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\frac{\partial u_4}{\partial x_3}=0,\\
&\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u_3}{\partial x_3}+\frac{\partial u_4}{\partial x_2}=0,\\
&\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}-\frac{\partial u_4}{\partial x_1}=0,\\
&\frac{\partial u_1}{\partial x_3}-\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}=0,
\end{aligned} \tag{4}$$

является частным случаем системы (3).

Для этого достаточно положить $n=3$, $m=4$.

$$e_{3,4}^{(1)}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix},\quad e_{3,4}^{(2)}=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix},\quad e_{3,4}^{(3)}=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Тогда (3) превратится в (4) и, как нетрудно проверить, свойства (1), (2) имеют место.

Система (3) содержит в себе как частный случай также систему, рассмотренную в работах [4–6]. В этом случае

$$e_{4,4}^{(1)}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad e_{4,4}^{(2)}=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{pmatrix},$$

$$e_{4,4}^{(3)}=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{pmatrix},\quad e_{4,4}^{(4)}=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

и выполнение условий (1), (2) проверяется непосредственно.

Приведем ряд теорем о решениях обобщенной системы Коши — Римана размерности (n, m) первого порядка, обнаруживающие те их свойства, которые роднят их с аналитическими функциями комплексного переменного.

Теорема 1. *Координатные функции $u_k(x)$, $k=1, 2, \ldots, m$, решения обобщенной системы Коши — Римана являются гармоническими функциями.*

Доказательство. В силу (3)

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} e_{n,m}^{(i)}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)u(x)\cdot\sum_{i=1}^{n} e_{n,m}^{(i)}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)v(x)\,d\Omega=0 \tag{5}$$

для любого финитного в Ω вектора $v(x)$; здесь Ω — область, в которой справедливо (3).

Интегрируя в (5) по частям и учитывая унитарность матриц $e_{n,m}^{(i)}$, а также (2), получаем

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}\cdot v(x)\,d\Omega=0,$$

что в силу произвольности $v(x)$ доказывает теорему.

Т е о р е м а 2 (обобщенная теорема Коши). *Если* $u(x)=(u_1(x), \ldots, u_m(x))$ *— гладкое решение обобщенной системы Коши — Римана размерности* (n, m) *первого порядка в замыкании гладкой области* Ω, *то*

$$\int\limits_{\dot\Omega} \sum_{i=1}^{n} e_{n,m}^{(i)}(\nu_i(x))\, u(x)\, d\dot\Omega=0, \tag{6}$$

где $\dot\Omega$ *— граница области* Ω, $\nu(x)=(\nu_1(x), \ldots, \nu_n(x))$ *— единичный вектор внешней нормали к* $\dot\Omega$ *в точке* $x\in\dot\Omega$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу (3) имеем

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} e_{n,m}^{(i)}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) u(x)\, d\Omega=0.$$

Интегрируя по частям по формуле Гаусса — Остроградского, получаем отсюда (6).

Т е о р е м а 3 (обобщенная формула Коши). *Справедливо интегральное представление*

$$u(x)=-\int\limits_{\Omega} \operatorname{div}_y \left\{ \sum_{i=1}^{n} [e_{n,m}^{(i)}]^* \left(\frac{\partial}{\partial y_i} K(x-y)\right) \sum_{j=1}^{n} e_{n,m}^{(j)} u(y) \right\} d\Omega_y +$$

$$+\int\limits_{\dot\Omega} \sum_{i=1}^{n} [e_{n,m}^{(i)}]^* \left(\frac{\partial}{\partial y_i} K(x-y)\right) \sum_{j=1}^{n} e_{n,m}^{(j)} u(y)\, \nu_j(y)\, d\dot\Omega_y,$$

где $x\in\Omega$, $K(x-y)$ *— фундаментальная функция для оператора Лапласа и пространства* R^n, div_y *— дивергенция по координатам точки* y.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это следует из теоремы Гаусса — Остроградского (ср. с [2], стр. 241).

П р и м е ч а н и е. Поверхностный интеграл справа дает, как нетрудно заметить, решение системы (3) и поэтому является обобщением интеграла типа Коши.

С л е д с т в и е. *Для обобщенной системы Коши — Римана размерности* (n, m) *первого порядка существует корректная краевая задача (нётеровых краевых задач она, как известно, вообще говоря, не имеет).*

Остановимся еще на вопросе о том, в какой мере для системы Коши — Римана размерности (n, m) первого порядка может быть развита теория типа теории обобщенно аналитических функций И. Н. Векуа — Л. Берса.

Рассмотрим область $\Omega\subset R^n$. Нам будет удобно предполагать, что Ω содержит бесконечно удаленную точку $(|x|=\infty)$. Через $W_2^{(1)}(\Omega)$ обозначим пополнение множества всех бесконечно гладких финитных в R^n векторов $u(x)=(u_1(x), \ldots, u_m(x))$ по норме

$$\|u\|=\left\{ \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} \left| e_{n,m}^{(i)}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) u(x) \right|^2 d\Omega \right\}^{1/2}.$$

Положим

$$Eu(x)=\sum_{i=1}^{n} e_{n,m}^{(i)}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) u(x), \tag{7}$$

$$Au(x)=\sum_{i=1}^{n} \alpha_{n,m}^{(i)}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) u(x), \tag{8}$$

где $\{\alpha_{n,m}^{(i)}\}$ — система n квадратных матриц порядка m с постоянными элементами такая, что

$$\det \sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_{n,m}^{(i)} \neq 0 \quad \forall x \neq 0, \tag{9}$$

и рассмотрим подпространства

$$W_2^{(1)}(\Omega, E) = \{u: \ u \in W_2^{(1)}(\Omega), \ Eu = 0\},$$

$$W_2^{(1)}(\Omega, A) = \{u: \ u \in W_2^{(1)}(\Omega), \ Au = 0\},$$

Теорема 4 (ср. с ([1]), стр. 169). *Существует автоморфизм пространства* $W_2^{(1)}(\Omega)$, *отображающий* $W_2^{(1)}(\Omega, A)$ *на* $W_2^{(1)}(\Omega, E)$.

Доказательство. Положим

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} e_{n,m}^{(i)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) u(x) \cdot \sum_{i=1}^{n} e_{n,m}^{(i)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) v(x)\, d\Omega,$$

$$\langle u, v\rangle^{(\alpha)} = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \alpha_{n,m}^{(i)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) u(x) \cdot \sum_{i=1}^{n} e_{n,m}^{(i)} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) v(x)\, d\Omega,$$

и определим оператор $\tilde{A}$ соотношением

$$\langle \tilde{A} u, \ v\rangle = \langle u, \ v\rangle^{(\alpha)},$$

где $u \in W_2^{(1)}(\Omega)$ — фиксированный, $v \in W_2^{(1)}(\Omega)$ — произвольный элементы, $\tilde{A} u \in W_2^{(1)}(\Omega)$.

Иначе говоря, положим

$$\tilde{A} = E^{-1} A, \tag{10}$$

где E^{-1} — некоторый правый обратный оператор к оператору E, определенный в пространстве m-мерных векторов $\mathscr{L}_2(\Omega)$ в силу эллиптичности оператора (7), т. е. в силу условия (1).

В силу условия (9) на оператор (8) оператор (10) является автоморфизмом в пространстве $W_2^{(1)}(\Omega)$ и отображает $W_2^{(1)}(\Omega, A)$ на $W_2^{(1)}(\Omega, E)$. Теорема 4 доказана.

Таганрогский радиотехнический институт

Поступило 17 X 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *И. Н. Векуа*, Обобщенные аналитические функции, Физматгиз, М., 1959. [2] *А. В. Бицадзе*, Основы теории аналитических функций комплексного переменного, «Наука», М., 1972. [3] *G. Moisil, N. Theodoresku*, Mathematica, v. 5, 141 (1931). [4] *R. Fueter*, Comm. Math. Helv., v. 4, 13 (1932); v. 7, 307 (1935); v. 8, 371 (1936). [5] *М. З. Соломяк*, ДАН, т. 150, № 1, 48 (1963). [6] *В. С. Виноградов*, ДАН, т. 154, № 1, 16 (1964).