

УДК 517.9

МАТЕМАТИКА

Ю. А. ДУБИНСКИЙ

ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА БЕСКОНЕЧНОГО ПОРЯДКА НА ТОРЕ И НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком С. М. Никольским 23 XII 1974)

В работе рассматриваются классы периодических функций $W^\infty\{a_\alpha, p_\alpha\}$ типа пространств Соболева бесконечного порядка и смежные вопросы нелинейных уравнений в процессе неограниченного возрастания порядка уравнения. В п. 1 устанавливается критерий нетривиальности $W^\infty\{a_\alpha, p_\alpha\}$; в п. 2 изучается разрешимость нелинейного эллиптического уравнения бесконечного порядка на торе; в п. 3 рассматривается более общий вопрос о поведении решений нелинейных эллиптических уравнений порядка $2m$ при $m \rightarrow \infty$; в п. 4 рассматриваются гиперболические существенно нелинейные уравнения бесконечного порядка.

1. Критерий нетривиальности $W^\infty\{a_\alpha, p_\alpha\}$. Пусть T^n — n -мерный тор, $a_\alpha \geq 0$, $r_\alpha \geq 1$, $p_\alpha \geq 1$ — произвольные числовые последовательности. Рассматривается пространство Соболева бесконечного порядка на T^n

$$W^\infty\{a_\alpha, p_\alpha\} = \left\{ u(x) \in C^\infty(T^n) : \rho(u) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha \|D^\alpha u\|_{r_\alpha}^{p_\alpha} < \infty \right\}$$

где $\|u\|_{r_\alpha}$ — норма $u(x)$ в пространстве $L_{r_\alpha}(T^n)$.

Возникает вопрос о непустоте $W^\infty\{a_\alpha, p_\alpha\}$, т. е. о существовании хотя бы одной функции $u(x) \neq \text{const}$, имеющей конечный «интеграл» $\rho(u)$. Нас будут интересовать только те пространства $W^\infty\{a_\alpha, p_\alpha\}$, которые являются бесконечномерными, т. е. содержат бесконечное множество линейно независимых функций $u \in W^\infty\{a_\alpha, p_\alpha\}$.

Теорема 1. *Пространство $W^\infty\{a_\alpha, p_\alpha\}$ непусто и является бесконечномерным тогда и только тогда, когда существует последовательность различных неотрицательных мультииндексов $q_v = (q_{1v}, \dots, q_{nv})$, $v = 0, 1, \dots$, такая, что*

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha q_v^{\alpha p_\alpha} (2\pi)^{n p_\alpha / r_\alpha} < \infty. \quad (*)$$

Доказательство. Достаточность условия $(*)$ очевидна, ибо в этом случае $\exp i q_v x \in W^\infty\{a_\alpha, p_\alpha\}$. Для доказательства необходимости следует учесть неравенство $\|D^\alpha u\|_{r_\alpha} \geq |c_q q^\alpha| (2\pi)^{n/r_\alpha}$, где $c_q = (2\pi)^{-n} \langle u, \exp i q x \rangle$, q любое, и прийти к противоречию.

Замечание. Условие $(*)$ не исключает того, что $W^\infty\{a_\alpha, p_\alpha\}$ является пространством периодических функций, зависящих от меньшего числа переменных. Желая исключить в приложениях этот вырождающийся случай, потребуем, чтобы $W^\infty\{a_\alpha, p_\alpha\}$ было, например, плотно в $L_2(T^n)$. Нетрудно видеть, что для плотности вложения $W^\infty\{a_\alpha, p_\alpha\} \subset L_2(T^n)$ необхо-

димо и достаточно, чтобы в условии (*) последовательность q_ν была такой, чтобы $\min(q_{1\nu}, \dots, q_{n\nu}) \rightarrow \infty$ при $\nu \rightarrow \infty$. Ниже будем рассматривать именно такие пространства $W^\infty\{a_\alpha, p_\alpha\}$ и называть их нетривиальными.

2. Нелинейные эллиптические уравнения бесконечного порядка. Рассмотрим на T^n эллиптическое уравнение бесконечного порядка

$$L(u) \equiv \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, D^\gamma u) = h(x), \quad |\gamma| \leq |\alpha|, \quad (1)$$

где $A_\alpha(x, \xi_\gamma)$ — непрерывные функции x, ξ_γ . Допустим, что для любого $N \geq 0$ и всех $x \in T^n, \xi_\gamma, \eta_\alpha, |\gamma| \leq |\alpha|$ выполнены следующие неравенства:

$$\left| \sum_{|\alpha| \leq N} A_\alpha(x, \xi_\gamma) \eta_\alpha \right| \leq K \left(\sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha |\xi_\alpha|^{p_\alpha-1} |\eta_\alpha| + 1 \right), \quad (**)$$

где $a_\alpha \geq 0, p_\alpha > 1, K > 0$ постоянные;

$$\operatorname{Re} \sum_{|\alpha| \leq N} A_\alpha(x, \xi_\gamma) \xi_\alpha \geq \delta \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha |\xi_\alpha|^{p_\alpha} - K, \quad (***)$$

где $\delta > 0, K > 0$ — постоянные.

Введем пространство правых частей $W^{-\infty}\{a_\alpha, p'_\alpha\}$, как пространство функций $h(x) = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha D^\alpha h_\alpha(x)$, где $h_\alpha(x) \in L_{p'_\alpha}(T^n)$, $p'_\alpha = p_\alpha / (p_\alpha - 1)$, таковы, что

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha \|h_\alpha\|_{p'_\alpha}^{p'_\alpha} < \infty.$$

Теорема 2. Пусть выполнены условия (**) и (***), причем пространство $W^\infty\{a_\alpha, p_\alpha\}$, $r_\alpha \equiv p_\alpha$, нетривиально. Кроме того допустим, что $p_\alpha \in [p, q]$, $1 < p \leq q < \infty$.

Тогда для любой функции $h(x) \in W^{-\infty}\{a_\alpha, p'_\alpha\}$ существует по крайней мере одно решение $u(x) \in W^\infty\{a_\alpha, p_\alpha\}$ уравнения (1).

Доказательство проводится методом Галеркина. Именно, пусть $u_m(x)$ — приближенное решение уравнения (1):

$$\sum_{|\alpha| \leq m} \langle A_\alpha(x, D^\gamma u_m), (iq)^\alpha \exp iqx \rangle = \langle h_m, \exp iqx \rangle, \quad |q| \leq m,$$

$$u_m(x) = \sum_{|q| \leq m} c_q \exp iqx, \quad h_m(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha D^\alpha h_\alpha(x).$$

Из условия (***) следует, что существует подпоследовательность $u_k(x)$, сходящаяся к некоторой функции $u(x) \in W^\infty\{a_\alpha, p_\alpha\}$ равномерно со всеми производными. Эта функция и есть искомое решение. Отметим, что при замыкании по базису существенно используется теорема об оценке сумм Фурье в L_{p_α} (см., например, (1), стр. 594).

Замечание. Если выполнено условие строгой монотонности

$$\operatorname{Re} \sum_{|\alpha| \leq N} [A_\alpha(x, \xi_\gamma) - A_\alpha(x, \eta_\gamma)] (\xi_\alpha - \eta_\alpha) > 0, \quad \xi_\alpha \neq \eta_\alpha, \quad (2)$$

то решение уравнения (1) единственно. Отметим, что в отличие от уравнений конечного порядка условие монотонности для разрешимости уравнения бесконечного порядка никакой роли не играет.

3. Поведение решений эллиптических уравнений при неограниченном возрастании порядка. Пусть $u_m(x)$ — решение нелинейного эллиптического уравнения порядка $2m$

$$L_{2m}(u_m) \equiv \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_{\alpha m}(x, D^i u_m) = h_m(x), \quad x \in T^n. \quad (3)$$

Допустим, что выполнены следующие условия:

а) функции $A_{\alpha m}(x, \xi_\gamma)$ непрерывны по x и ξ_γ , причем для всех $m \geq 0$, x , ξ_γ и η_α

$$\left| \sum_{|\alpha| \leq m} A_{\alpha m}(x, \xi_\gamma) \eta_\alpha \right| \leq K \left(\sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha m} |\xi_\alpha|^{p_{\alpha m}-1} |\eta_\alpha| + 1 \right),$$

где $K > 0$, $a_{\alpha m} \geq 0$, $1 \leq p_{\alpha m} \leq q < \infty$ — постоянные;

$$\text{б) } \operatorname{Re} \sum_{|\alpha| \leq m} A_{\alpha m}(x, \xi_\gamma) \xi_\alpha \geq \delta \sum_{|\alpha| \leq m} a_{\alpha m} |\xi_\alpha|^{p_{\alpha m}} - K; \quad \delta > 0;$$

в) если $m \rightarrow \infty$, то $a_{\alpha m} \rightarrow a_\alpha$, $p_{\alpha m} \rightarrow p_\alpha$; далее, если $\xi_{\gamma m} \rightarrow \xi_\gamma$, то $A_\alpha(x, \xi_{\gamma m}) \rightarrow A_\alpha(x, \xi_\gamma)$ равномерно на ограниченных множествах переменных ξ_γ ;

г) пространство $W^\infty\{b_\alpha, q_\alpha\}$ нетривиально, где $b_\alpha = \sup_m a_{\alpha m}$, $q_\alpha = \sup_m p_{\alpha m}$.

В дальнейшем существенно различны случаи $a_\alpha > 0$ для бесконечного множества значений α , т. е. случай предельного уравнения (1) бесконечного порядка, и случаи $a_\alpha = 0$ при $|\alpha| > r$, т. е. случаи предельного уравнения порядка $2r$

$$\sum_{|\alpha| \leq r} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha A_\alpha(x, D^i u) = h(x). \quad (4)$$

Во втором случае дополнительно требуется, чтобы было выполнено условие монотонности

$$\text{д) } \operatorname{Re} \sum_{|\alpha| \leq m} [A_{\alpha m}(x, \xi_\gamma) - A_{\alpha m}(x, \eta_\gamma)] (\xi_\alpha - \eta_\alpha) \geq 0, \quad m \geq 0.$$

Теорема 3. Пусть $a_\alpha > 0$ для бесконечного множества значений α и выполнены условия а)–г). Пусть далее, $h_m(x) \rightarrow h(x) \in W^{-\infty}\{a_\alpha, p_\alpha\}$ в том смысле, что $\langle h_m, v \rangle \rightarrow \langle h, v \rangle$ для любой функции $v(x) \in W^\infty\{b_\alpha, q_\alpha\}$.

Тогда решение уравнения (1) существует и является предельной точкой решений $u_m(x)$ уравнений (3). При этом подпоследовательность $\{u_k(x)\} \subset \{u_m(x)\}$ сходится к $u(x)$ равномерно со всеми производными.

Теорема 4. Пусть $a_\alpha = 0$ при $|\alpha| > r$ и выполнены условия а)–д). Пусть, далее $h_m(x) \rightarrow h(x)$ слабо в $W_p^{-r}(T^n)$.

Тогда решение уравнения (4) существует и является предельной точкой решения $u_m(x)$ в смысле слабой сходимости в $W_p^r(T^n)$.

Доказательство теорем 3, 4 проводится в том же плане, что и доказательство теоремы 2, при этом при доказательстве теоремы 4 существенно используется техника теории монотонных операторов (см., например, (2^{–8})).

Пример. Пусть $a_m \geq 0$, причем $\varphi(z) \equiv \sum_{k+l \geq 0} a_{k+l} \binom{k}{k+l} z_1^k z_2^{l-k}$ — целая функция. Тогда решения $u_m(x)$ уравнения

$$(-1)^m a_m \Delta^m u_m - \Delta u_m + u_m = h(x), \quad h(x) \in W_2^{-1}(T^2),$$

сходятся в $W_2^{-1}(T^2)$ к решению задачи $-\Delta u + u = h(x)$.

Замечание. Рассмотрение примера $(-1)^m a_m D^{2m} u_m + u_m = h(x)$, $x \in S^1$, показывает, что условие г) существенно и его нельзя ослабить.

4. Разрешимость нелинейных гиперболических уравнений. Рассмотрим задачу Коши

$$u'' + L(u) = h(t, x), \quad u(0, x) = u'(0, x) = 0, \quad (5)$$

где $L(u)$ — нелинейный оператор бесконечного порядка вида (1), $x \in T^n$, $t \in [0, A]$, где $A > 0$ произвольно.

Допустим, что выполнено условие (**) из п. 2 и, кроме того, для любой гладкой функции $u(t, x)$ $u(0, x) = u'(0, x) = 0$, справедливо неравенство

$$\operatorname{Re} \int_0^t \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x, D^\alpha u), D^\alpha u' > d\tau \geq \delta \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \|D^\alpha u\|_{p_\alpha}^{p_\alpha}(t) - K,$$

где $\delta > 0$, $K > 0$ — постоянные, $t \in [0, A]$, $m \geq 0$.

Пусть, далее $p_\alpha \in [p, q]$, где $1 < p \leq q < \infty$ и пространство $W^\infty\{a_\alpha, p_\alpha\}$ тривиально. Наконец, $h(t, x)$, $h'(t, x) \in L_\infty(0, A; W^{-\infty}\{a_\alpha, p_\alpha'\})$.

Теорема 5. В указанных условиях задача (5) имеет по крайней мере одно решение $u(t, x)$, причем $u(t, x) \in L_\infty(0, A; W^{-\infty}\{a_\alpha, p_\alpha\})$, $u'(t, x) \in L_2([0, A] \times T^n)$, $u''(t, x) \in L_1(0, A; W^{-\infty}\{a_\alpha, p_\alpha'\})$.

Доказательство проводится методом Галеркина — Фаздо — Хопфа, при этом приближенные решения

$$u_m(t, x) = \sum_{|q| \leq m} c_q(t) \exp iqx, \quad c_q(0) = c_q'(0) = 0$$

определяются как решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\langle u_m'', \exp iqx \rangle + \langle L_{2m}(u_m), \exp iqx \rangle = \langle h, \exp iqx \rangle, \\ |q| = 0, \dots, m.$$

З а м е ч а н и е. Подчеркнем, что, в отличие от эллиптических и параболических уравнений, смешанная задача для гиперболических нелинейных уравнений вида (5) конечного порядка в классах Соболева, вообще говоря, не разрешима.

Московский энергетический институт

Поступило
29 XI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. К. Барн, Тригонометрические ряды, М., «Наука», 1961. ² J. Minty, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., v. 50, 1038 (1963). ³ F. E. Browder, Bull. Am. Math. Soc., v. 69, 862 (1963). ⁴ J. Leray, J. Lions, Bull. Soc. Math. France, v. 93, 97 (1965). ⁵ Ю. А. Дубинский, УМН, т. 23, № 1, 45 (1968). ⁶ Р. И. Качуровский, там же, № 2, 121 (1968). ⁷ Ж.-Л. Лионс, Некоторые методы решения нелинейных краевых задач, М., «Мир», 1972. ⁸ М. М. Вайнберг, Вариационный метод и метод монотонных операторов, М., «Наука», 1972.