

А. С. СОЛОДОВНИКОВ, Н. Р. КАМЫШАНСКИЙ

## ПОЛЮСА ПСЕВДОРИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 21 XI 1974)

Предметом настоящей заметки являются полные аналитические псевдоримановы пространства  $V$  с полюсами. Точка  $p \in V$  называется полюсом  $n$ -мерного псевдориманова пространства  $V$ , если размерность группы всех движений пространства  $V$ , оставляющих  $p$  на месте, равна  $1/2n(n-1)$ . В данной работе мы рассматриваем только пространства размерности 2; для этого случая полюс есть такая точка, относительно которой пространство допускает однопараметрическую группу гиперболических вращений. Все полученные результаты обобщаются на случай пространств произвольной размерности  $n$  и произвольного индекса  $k$ .

Ниже мы придерживаемся следующей терминологии: геодезические, вдоль которых  $ds^2 < 0$ , называем минус-геодезическими, геодезические, для которых  $ds^2 > 0$ , — плюс-геодезическими, а геодезические, вдоль которых  $ds^2 = 0$ , как обычно, — изотропными. Геодезические, проходящие через данную точку  $q$ , называем геодезическими точки  $q$ . Множество всех точек, которые можно соединить с точкой  $q$  геодезическим отрезком («область влияния» точки  $q$ ) обозначаем  $O(q)$ .

1°. Комплексная функция полюса. Пусть  $p$  — полюс в полном аналитическом псевдоримановом пространстве  $V$  размерности 2 и пусть  $\{g_t | -\infty < t < \infty\}$  — однопараметрическая группа вращений пространства  $V$  около  $p$ , причем  $t$  имеет смысл гиперболического угла поворота в точке  $p$ . Поле скоростей

$$\xi(q) = \left. \frac{dg_t(q)}{dt} \right|_{t=0}, \quad q \in V,$$

есть аналитическое векторное поле на  $V$ . Следовательно,  $\xi^2(q)$  — аналитическая функция на  $V$ . Обозначим  $F(\rho)$  ограничение функции  $\xi^2$  на любую минус-геодезическую  $\gamma_-$  полюса  $p$ , отнесенную к каноническому параметру  $\rho$  с началом отсчета в точке  $p$ . Аналогично, пусть  $\bar{F}(\rho)$  — ограничение функции  $\xi^2$  на любую плюс-геодезическую  $\gamma_+$  полюса  $p$ . В силу полноты пространства  $V$  канонический параметр на каждой геодезической изменяется от  $-\infty$  до  $\infty$ , следовательно, аналитические функции  $F(\rho)$  и  $\bar{F}(\rho)$  определены на всей числовой оси, причем  $F(0) = \bar{F}(0) = 0$ ,  $F(\rho) \geq 0$  и  $\bar{F}(\rho) \leq 0$ .

Лемма. В окрестности  $\rho = 0$

$$F(\rho) = \rho^2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_{2n} \rho^{2n}, \quad \bar{F}(\rho) = -\rho^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_{2n} \rho^{2n}.$$

Сформулированная лемма позволяет утверждать, что существует голоморфная функция  $F_p(z)$  комплексного переменного  $z = x + yi$ , определенная в окрестности координатного креста (совокупности осей  $Ox$  и  $Oy$ ) на плоскости  $z$  и такая, что

$$F_p(x+0i) = F(x), \quad F_p(0+yi) = \bar{F}(y).$$

Эту функцию  $F_p(z)$  мы будем называть комплексной функцией полюса  $p$ . Из определения функции  $F_p(z)$  легко получить ряд следствий.

Следствие 1. Каждому вещественному или чисто мнимому нулю  $z_0$  функции  $F_p(z)$  отвечает полюс  $q$  на  $\gamma_-$  или  $\gamma_+$ , соответствующий значению  $\rho=z_0$  или  $\rho=z_0/i$  канонического параметра  $\rho$  на  $\gamma_-$  или  $\gamma_+$ .

Следствие 2. Если  $z_0$  — вещественный или чисто мнимый нуль функции  $F_p(z)$ , то: а) эта функция допускает голоморфное продолжение вдоль всей прямой  $\operatorname{Re} z=z_0$  соответственно  $\operatorname{Im} z=iz_0$ ; б) вблизи  $z=z_0$

$$F_p(z) = k^2(z-z_0)^2 + \sum_{n=2}^{\infty} b_{2n}(z-z_0)^{2n}, \quad k, b_{2n} \in \mathbb{R}, \quad n=2, 3, \dots; \quad k \neq 0.$$

Следствие 3. Если  $c$  — наименьший положительный (вещественный) нуль функции  $F_p(z)$ , то  $2c$  — период этой функции и все вещественные нули функции  $F_p(z)$  исчерпываются точками  $z=tc$ , где  $t$  любое целое. Аналогичное утверждение имеет место, если  $ci$  — наименьший по модулю чисто мнимый нуль функции  $F_p(z)$ .

2°. Три типа полюсов. Пусть  $V$  — полное аналитическое пространство и  $p$  — его полюс. Для нулей функции  $F_p(z)$  возможны только следующие случаи:

I. Единственный нуль на координатном кресте есть  $z=0$ .

II. Вещественные нули образуют решетку  $z=tc$  ( $c$  фиксированное,  $t$  любое целое), а чисто мнимых нулей нет.

III'. Чисто мнимые нули образуют решетку  $z=tc_i$ , а вещественных нулей, отличных от  $z=0$ , нет.

III. Вещественные нули образуют решетку  $z=tc_1$ , а чисто мнимые нули вместе с  $z=0$  образуют решетку  $z=tc_2i$ .

В соответствии с этими ситуациями будем называть полюс  $p$  полюсом первого, второго или третьего типа.

Предположим, что  $p$  — полюс третьего типа. Тогда функция  $F_p(z)$  допускает голоморфные продолжения как вдоль вертикальной прямой  $z=c_1+yi$ , так и вдоль горизонтальной прямой  $z=x+c_2i$ . В точке  $z=c_1+c_2i$  эти продолжения встречаются. Если они совпадают, то будем полюс  $p$  называть полюсом без ветвления. В противном случае  $p$  есть полюс с ветвлением.

В одном и том же полном пространстве  $V$  могут существовать полюса разных типов. Однако такая ситуация в данной работе не встречается. Каждое из рассматриваемых нами пространств содержит только полюса одного типа.

3°. Пространства, содержащие полюс  $p$  первого типа и совпадающие с  $O(p)$ . Пусть  $p$  — полюс первого типа в полном аналитическом псевдоримановом пространстве  $V$ . Тогда из результатов п. 1° следует, что функция  $F_p(z)$  обладает следующими свойствами:

- 1)  $F_p(\rho+0i) > 0$ ,  $F_p(0+\rho i) < 0$  при всех вещественных  $\rho \neq 0$ ;
- 2) вблизи  $z=0$

$$F_p(z) = z^2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_{2n}z^{2n}, \quad a_{2n} \in \mathbb{R}.$$

Если к тому же область  $O(p)$  совпадает с  $V$ , то из полноты пространства  $V$  вытекает еще одно свойство функции  $F_p(z)$ :

- 3) Каждый из интегралов

$$\int_0^{\infty} \sqrt{F_p(\rho+0i)} d\rho, \quad \int_0^{\infty} \sqrt{-F_p(0+\rho i)} d\rho$$

расходится.

Справедлива следующая

**Теорема.** Пусть  $F(z)$  — какая угодно комплексная функция, голоморфная в окрестности координатного креста на плоскости  $z$  и обладающая указанными выше свойствами 1)–3).

Тогда существует полное аналитическое псевдориманово пространство  $V$ , содержащее некоторый полюс  $p$ , комплексная функция  $F_p(z)$  которого совпадает с заданной функцией  $F(z)$ . При этом  $O(p) = V$ .

Искомое пространство  $V$  можно реализовать на плоскости так, чтобы начало координат было полюсом  $p$ , прямые, проходящие через начало, были геодезическими полюса  $p$ , а равнобочные гиперболы являлись траекториями точек при вращении пространства  $V$  около  $p$ .

**З а м е ч а н и е.** Полные аналитические пространства, содержащие полюс  $p$  первого типа и не совпадающие с  $O(p)$ , существуют. При этом область  $O(p)$  представляет собой внутренность «восьмиугольника» с изотропными сторонами и вершинами в бесконечности.

4°. Пространства, содержащие полюс  $p$  второго типа. Пусть  $p$  — полюс второго типа в полном аналитическом пространстве  $V$ . Не теряя общности, можно считать, что имеет место случай II пункта 2°. Тогда  $F_p(z)$  допускает голоморфное продолжение вдоль каждой из прямых  $z = tc + yi$  (см. следствие 2). Следовательно, мы можем считать, что функция  $F_p(z)$  определена в окрестности множества  $L$  точек прямой  $z = x + 0i$ , а также прямых  $z = tc + yi$  ( $t$  любое целое).

Каждому вещественному нулю  $z_m = tc$  функции  $F_p(z)$  отвечает полюс  $p_m$  пространства  $V$ , лежащий на минус-геодезической полюса  $p = p_0$ . При этом полюсы  $p_{2n}$  с четными номерами имеют изометричные окрестности; то же самое относится к полюсам  $p_{2n+1}$  с нечетными номерами.

Предположим дополнительно, что пространство  $V$  обладает следующим свойством:  $V$  есть объединение множеств  $O(p_m)$ ; иначе говоря, любая точка  $q \in V$  может быть соединена геодезическим отрезком хотя бы с одним из полюсов  $p_m$ .

Используя результаты п. 1°, легко показать, что функция  $F_p(z)$  полюса  $p$  в пространстве  $V$  указанного типа обладает следующими свойствами:

- 1) на множестве  $L$  функция  $F_p(z)$  обращается в нуль только в точках  $z = tc$  ( $t$  любое целое);
- 2) в окрестности  $z = 0$

$$F_p(z) = z^2 + \sum_{n=2}^{\infty} a_{2n} z^{2n}, \quad a_{2n} \in \mathbb{R},$$

а в окрестности  $z = c$

$$F_p(z) = k^2(z-c)^2 + \sum_{n=2}^{\infty} b_{2n}(z-c)^{2n}, \quad k, b_{2n} \in \mathbb{R}, \quad k \neq 0;$$

- 3) каждый из интегралов

$$\int_0^{\infty} \sqrt{-F_p(0 + \rho i)} d\rho, \quad \int_0^{\infty} \sqrt{-F_p(c + \rho i)} d\rho$$

расходится.

Последнее свойство является следствием условия  $V = \cup O(p_m)$  и полноты  $V$ .

**Т е о р е м а.** Пусть комплексная функция  $F(z)$ , голоморфная в окрестности указанного выше множества  $L$ , обладает сформулированными выше свойствами 1)–3).

Тогда существует полное аналитическое псевдориманово пространство  $V$ , содержащее некоторый полюс  $p$ , комплексная функция  $F_p(z)$  которого совпадает с заданной функцией  $F(z)$ .

Искомое пространство может быть реализовано в виде полосы  $-\infty < u < \infty$ ,  $-\pi/2 < v < \pi/2$  на плоскости с декартовыми координатами  $u, v$ . При этом полюсами будут служить точки  $p_m = (m\pi, 0)$ , а изотропные геодезические этих полюсов будут определяться уравнением  $\cos^2 u = \cos^2 v$ . Простейший пример такого пространства дает метрика  $ds^2 = \cos^{-2} v (-du^2 + dv^2)$

постоянной кривизны — 1. В этом случае полюсом является, конечно, любая точка, а комплексная функция полюса есть  $\sin^2 z$ .

5°. Пространства, содержащие полюс  $p$  третьего типа без ветвления. Пусть  $p$  — полюс третьего типа без ветвления в полном аналитическом пространстве  $V$ . Тогда функция  $F_p(z)$  обладает свойствами:

1) она голоморфна в некоторой окрестности сетки  $T$ :

$$z = mc_1 + yi \text{ или } z = x + nc_2i$$

на плоскости  $z$  ( $c_1, c_2$  фиксированные,  $m, n$  любые целые);

2) на множестве  $T$  функция  $F_p(z)$  обращается в нуль только в узлах  $z = mc_1 + nc_2i$ ;

3) в окрестности любой из точек  $z_0 = 0, c_1, c_1 + c_2i, c_2i$  имеет место разложение в ряд вида

$$F_p(z) = k^2(z - z_0)^2 + \sum_{n=2}^{\infty} b_{2n}(z - z_0)^{2n}, \quad k, b_{2n} \in \mathbb{R}, \quad k \neq 0,$$

где  $k=1$ , если  $z_0=0$ .

**Теорема.** Пусть  $F(z)$  — комплексная функция, голоморфная в некоторой окрестности указанного выше множества  $T$  и обладающая перечисленными выше свойствами 1)–3).

Тогда существует полное аналитическое псевдориманово пространство  $V$ , содержащее некоторый полюс  $p$ , комплексная функция  $F_p(z)$  которого совпадает с заданной функцией  $F(z)$ .

Требуемое пространство  $V$  можно реализовать на плоскости с декартовыми координатами  $u, v$ , из которой исключены точки, удовлетворяющие условно  $\cos^2 u = \cos^2 v$ . При этом точки  $p_{m, n} = (m\pi, n\pi)$  ( $m, n$  любые целые) будут служить полюсами пространства  $V$ , а изотропные геодезические этих полюсов будут определяться уравнением  $\cos^2 u = \cos^2 v$ . В этой реализации два полюса  $p_{m, n}$  и  $p_{m', n'}$  будут иметь изометричные окрестности, если  $m \equiv m', n \equiv n' \pmod{2}$ ; тем самым в  $V$  могут существовать не более четырех попарно неизометричных полюсов. Один из примеров таких пространств дает метрика

$$ds^2 = (\cos^2 u + \cos^2 v)^{-1}(-du^2 + dv^2),$$

для которой  $F_p(z) = \sin^2(z\sqrt{2} + a/2)$ , где  $\sin z$  обозначает эллиптический косинус  $z$  с «модулем»  $k=1/\sqrt{2}$  и  $a$  есть вещественный полупериод функции  $\sin z$ . В этом примере окрестности всех полюсов изометричны.

6°. О пространствах, содержащих полюса третьего типа с ветвлением. Не входя в подробности, отметим, что такие пространства существуют. Рассмотрим, например, пространство  $V$ , устроенное следующим образом. Пусть  $\{A_n B_n C_n D_n | n \text{ любое целое}\}$  — совокупность замкнутых квадратов со сторонами 1. Для каждого  $k$  склеим стороны  $A_{2k} B_{2k}, B_{2k} C_{2k}, C_{2k} D_{2k}, D_{2k} A_{2k}$  соответственно со сторонами  $A_{2k+1} B_{2k+1}, B_{2k+1} C_{2k+1}, C_{2k+1} D_{2k+1}, D_{2k+1} A_{2k+1}$ , после чего исключим из полученного многообразия вершины всех квадратов. На оставшемся пространстве  $V$  (бесконечной «гирлянде») можно задать псевдориманову метрику так, что центры квадратов будут служить полюсами, а диагонали — изотропными геодезическими этих полюсов. При этом все полюса будут полюсами третьего типа с ветвлением и в общем случае окрестности этих полюсов будут попарно неизометричны.