

УДК 518:517.944/947

МАТЕМАТИКА

З. И. ФЕДОТОВА, Ю. И. ШОКИН

# ИНВАРИАНТНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ С ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ МАТРИЦЕЙ ВЯЗКОСТИ

(Представлено академиком Н. Н. Яненко 18 XI 1974)

1. В работе рассматриваются инвариантные разностные схемы <sup>(1)</sup>, аппроксимирующие систему уравнений газовой динамики

$$w_t + F_x = 0, \quad (1)$$

или, что то же,

$$w_t + Aw_x = 0, \quad A = \frac{dF}{dw}, \quad (2)$$

в первом дифференциальном приближении (п.д.п.) <sup>(2, 3)</sup> которых матрица вязкости имеет вид полинома от матрицы  $A$ .

В случае лагранжевых координат

$$w = \begin{pmatrix} u \\ v \\ E \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} p \\ -u \\ up \end{pmatrix};$$

в случае эйлеровых координат

$$w = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho \\ \rho E \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} p + \rho u^2 \\ \rho u \\ \rho u E + up \end{pmatrix};$$

здесь  $u$  — скорость газа,  $\rho$  — плотность,  $v = 1/\rho$ ,  $p$  — давление,  $E = \varepsilon + 1/2 u^2$ ,  $\varepsilon$  — удельная внутренняя энергия,  $p = p(\varepsilon, \rho)$ .

Рассматривается класс явных разностных схем вида

$$\frac{\Delta_0 w^n(x)}{\tau} + \frac{\Delta_1 - \Delta_{-1}}{2h} F^n(x) = \frac{1}{h^2} \left[ \Omega \left( x + \frac{h}{2} \right) \Delta_1 - \Omega \left( x - \frac{h}{2} \right) \Delta_{-1} \right] w^n(x), \quad (3)$$

параболической формой п.д.п. которых является система уравнений

$$w_t + F_x = (Cw_x)_x; \quad (4)$$

здесь  $t = n\tau$ ,  $h$  — шаг сетки по оси  $x$ ,  $\tau | h = \text{const}$ ,  $\Delta_0 = T_0 - E$ ,  $\Delta_1 = T_1 - E$ ,  $\Delta_{-1} = E - T_{-1}$ ,  $E\varphi(x, t) = \varphi(x, t)$ ,  $T_0\varphi(x, t) = \varphi(x, t + \tau)$ ,  $T_{\pm 1}\varphi(x, t) = \varphi(x \pm h, t)$ ,  $\Omega(x) = \Omega(w^n(x))$  — матрица порядка  $O(\tau)$ . Матрица  $\Omega$  выбирается так, что разностная схема (3) является инвариантной относительно сдвигов по осям  $x$ ,  $t$  и преобразования Галилея <sup>(4)</sup>, т. е. параболическая форма п.д.п. допускает эти преобразования. В этом случае будем говорить, что разностная схема обладает свойством Г. Матрица вязкости в п.д.п. имеет вид:

$$C = \Omega - \frac{\tau}{2} A^2.$$

Определим матрицу  $\bar{C}$  соотношением

$$Cw_x = \bar{C}\bar{w}_x,$$

где

$$w = \begin{pmatrix} u \\ v \\ p \end{pmatrix}, \quad \bar{w} = \begin{pmatrix} u \\ \rho \\ p \end{pmatrix}$$

в случае лагранжевых и эйлеровых координат соответственно.

**Л е м м а 1.** Разностная схема (3) обладает свойством Г тогда и только тогда, когда матрица  $\bar{C}$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ uv_{11}+r_1 & uv_{12}+r_2 & uv_{13}+r_3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

в лагранжевых координатах и

$$\begin{pmatrix} uv_{21}+r_1 & uv_{22}+r_2 & uv_{23}+r_3 \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} \\ 1/2u^2v_{21}+ur_1+q_1 & 1/2u^2v_{22}+ur_2+q_2 & 1/2u^2v_{23}+ur_3+q_3 \end{pmatrix} \quad (6)$$

в эйлеровых координатах.

Здесь

$$\frac{\partial r_i}{\partial t} = \frac{\partial r_i}{\partial x} = \frac{\partial q_i}{\partial t} = \frac{\partial q_i}{\partial x} = \frac{\partial r_i}{\partial u} = \frac{\partial q_i}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{\partial v_{ji}}{\partial t} = \frac{\partial v_{ji}}{\partial x} = \frac{\partial v_{ji}}{\partial u} = 0, \quad j=1, 2; \quad i=1, 2, 3.$$

Матрицы вида (5) и (6) будем называть Г-матрицами.

**Л е м м а 2.** Если матрицы  $C_1$  и  $C_2$  являются Г-матрицами, то их сумма также будет Г-матрицей.

2. В случае лагранжевых координат имеет место

**Л е м м а 3.**  $A^{2m} = a^{2m-2}A^2$ ,  $A^{2m+1} = a^{2m}A$ , где  $a^2 = pr_p - p_v$ ,  $a$  — скорость звука,  $m=1, 2, \dots$

Из леммы 3 следует, что любой полином вида

$$C = P(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_m A^m$$

можно представить в виде квадратичного трехчлена

$$C = P_2(A) = \beta_0 I + \beta_1 A + \beta_2 A^2,$$

где  $\beta_0 = \alpha_0$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$  есть функции от  $\alpha_i$  и  $a$ ,  $I$  — единичная матрица.

Справедлива

**Т е о р е м а 1.** 1) Если  $C = P(A)$  и

$$\frac{\partial \beta_j}{\partial u} = \frac{\partial \beta_j}{\partial x} = \frac{\partial \beta_j}{\partial t} = 0, \quad j=0, 1, 2,$$

то разностная схема (3) обладает свойством Г.

2) Если  $\alpha_0 = 0$ , то разностная схема обладает свойством К<sup>(2, 3)</sup>.

Доказательство теоремы следует из лемм 1—3.

Следствие. 1) Схема Лакса — Вендроффа<sup>(4)</sup> и схема предиктор — корректор<sup>(5)</sup> обладают свойствами К и Г.

2) Схема Лакса<sup>(6)</sup> обладает свойством Г и не обладает свойством К.

3. Рассмотрим случай эйлеровых координат. Справедлива

**Л е м м а 4.** Если  $C$  является Г-матрицей, то  $(A - uI)C$  — тоже Г-матрица.

Из лемм 1, 2, 4 вытекает

Теорема 2. 1) Если

$$C = \beta_0 I + \beta_1 (A - uI) + \dots + \beta_m (A - uI)^m$$

и

$$\frac{\partial \beta_j}{\partial u} = \frac{\partial \beta_j}{\partial x} = \frac{\partial \beta_j}{\partial t} = 0,$$

то разностная схема (3) обладает свойством Г.

2) Если  $\beta_0 = 0$ , то разностная схема обладает свойством К.

Наибольший практический интерес представляют разностные схемы с матрицей вязкости, являющейся полиномом не выше второй степени.

Имеет место

Теорема 3. Для того чтобы разностная схема с матрицей  $C = P_2(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2$  обладала свойством Г, необходимо и достаточно, чтобы полином  $P(A)$  можно было представить следующим образом:

$$C = P_2(A) = \beta_0 I + \beta_1 (A - uI) + \beta_2 (A - uI)^2,$$

$$\frac{\partial \beta_j}{\partial u} = \frac{\partial \beta_j}{\partial x} = \frac{\partial \beta_j}{\partial t} = 0, \quad j = 0, 1, 2.$$

4. Таким образом, разностная схема (3) будет обладать свойством Г, если матрица  $\Omega$  взята в виде  $\Omega = \frac{\tau}{2} A^2 + C$ , где матрица  $C$  определена условиями теоремы 1 (либо теорем 2 или 3).

Устойчивость указанного класса разностных схем в лагранжевых и эйлеровых координатах исследовалась методом п.д.п. <sup>(3)</sup>, что привело к неравенствам

$$P(\sigma_j) \geq 0, \quad \frac{\tau}{2} \sigma_j^2 + P(\sigma_j) \leq \frac{h^2}{2\tau}, \quad j = 1, 2, 3,$$

$\sigma_j$  — собственные числа матрицы  $A$ .

Вычислительный центр  
Сибирского отделения Академии наук СССР  
Новосибирск

Поступило  
12 XI 1974

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> Н. Н. Яненко, Ю. И. Шокин, Сб. Некоторые проблемы математики и механики, Л., «Наука», 1970. <sup>2</sup> Н. Н. Яненко, Ю. И. Шокин, ДАН, т. 182, № 2, 280 (1968). <sup>3</sup> Ю. И. Шокин, Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 122, 64 (1973). <sup>4</sup> P. D. Lax, B. Wendroff, Commun. Pure and Appl. Math., v. 13, 1, 217 (1960). <sup>5</sup> Н. Н. Яненко, Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосибирск, «Наука», 1967. <sup>6</sup> P. D. Lax, Commun. Pure and Appl. Math., v. 7, 1, 159 (1954).