

УДК 517.51

МАТЕМАТИКА

Г. Г. КЕМХАДЗЕ

**ЗАМЕЧАНИЕ О СХОДИМОСТИ ШАРОВЫХ ЧАСТИЧНЫХ СУММ
РЯДОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ИЗ КЛАССА L^p , $p > 1$**

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 6 XI 1974)

Пусть R^s — евклидово пространство размерности s , Z^s — множество целых точек пространства R^s . Если $x \in R^s$, то через x_k , $1 \leq k \leq s$, будем обозначать k -ю координату точки x . Далее, для $x, y \in R^s$ полагаем

$$x \cdot y = \sum_{k=1}^s x_k y_k, \quad |x| = \left(\sum_{k=1}^s x_k^2 \right)^{1/2}.$$

Через T^s будем обозначать множество $\{x: x \in R^s, 0 \leq x_k \leq 2\pi, k=1, 2, \dots, s\}$, а через $c(E)$ — количество точек множества E .

Рассмотрим тригонометрическую систему

$$\{e^{im \cdot x}\}_{m \in Z^s}. \quad (1)$$

Известно, что, в отличие от одномерного случая (см. ^(1, 2)), при $s > 1$ шаровые частичные суммы рядов Фурье по системе (1) функций из класса $L^p(T^s)$, $1 < p < 2$, могут расходиться почти всюду (п.в.) на T^s . Оказывается, однако, что это различие в поведении шаровых частичных сумм исчезает, если при каждом $s \geq 1$ вместо системы (1) рассматривать систему

$$\{e^{i\omega(m) \cdot x}\}_{m \in Z^s}, \quad (2)$$

где ω — соответствующим образом подобранное взаимно однозначное отображение Z^s на себя. Точнее, справедлива следующая

Теорема. Для каждого $s \geq 1$ существует такое взаимно однозначное отображение $\omega: Z^s \rightarrow Z^s$ на себя, что, каково бы ни было $p > 1$, шаровые частичные суммы ряда Фурье любой функции f из $L^p(T^s)$ по системе (2),

$$\sum_{|m| \leq r} \hat{f}(\omega(m)) e^{i\omega(m) \cdot x}, \quad \hat{f}(m) = (2\pi)^{-s} \int_{T^s} f e^{-im \cdot x} dx, \quad m \in Z^s,$$

при $r \rightarrow \infty$ сходятся к $f(x)$ п.в. на T^s . Более того, справедливо неравенство

$$\left\| \sup_{r \geq 0} \left| \sum_{|m| \leq r} \hat{f}(\omega(m)) e^{i\omega(m) \cdot x} \right| \right\|_{p, T^s} \leq C_p \|f\|_{p, T^s}. \quad (3)$$

Доказательство. Пусть $s > 1$ (при $s=1$ в силу теоремы Карлесона — Ханга ^(3, 4) можно брать $\omega(k)=k$, $k \in Z$) и $\{r_n\}_{n=0}^\infty$ — такая возрастающая последовательность неотрицательных чисел, что $Z^s = \bigcup_{n=0}^\infty K_n$, где $K_n = \{m: m \in Z^s, |m| = r_n\}$, $n=0, 1, 2, \dots$. Доказательство теоремы основано на том факте, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{c(K_n)} = \infty. \quad (4)$$

Так как для любого $r \geq 0$ и $s > 1$ $c(\{m: m \in Z^s, |m| = r\}) \geq c(\{m: m \in Z^2, |m| = r\})$, то (4) можно получить, используя, например, теорему Якоби (⁵), стр. 165), в силу которой $c(\{m: m \in Z^2, |m|^2 = 5^q\}) = 4(q+1)$, $q=0, 1, 2, \dots$

Введем следующие обозначения: $M = \{m: m \in Z^s, m_k = 0 \text{ при } k > 1\}$; $Q_n = \{m: m \in Z^s, |m_k| \leq n, k \geq 1\}$ и $P_n = Q_n \setminus M$, $n=0, 1, 2, \dots$; $G_n = P_n \setminus P_{n-1}$, $n=1, 2, \dots$. Построим последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^\infty$, по индукции удовлетворяющую условиям: $n_1 = \min\{q: c(K_q) > c(G_1)\}$ и $n_k = \min\{q: c(K_q) > c(G_k), q > n_{k-1}\}$ при $k > 1$. Это возможно в силу (4). Пусть теперь $\{B_n\}_{n=0}^\infty$ — произвольная последовательность множеств, удовлетворяющая условиям: $B_n \subset K_n$, $n=0, 1, 2, \dots$, $c(Bn_k) = c(G_k)$, $k=1, 2, \dots$, и $B_n = \emptyset$ при $n = n_k$, $k=1, 2, \dots$. Пусть $A_n = K_n \setminus B_n$, $n=0, 1, 2, \dots$.

Очевидно, что $c(A_n)$ при $n \geq 1$ — четное число. Рассмотрим также множество $D_0 = \{0\}$, $D_1 = \{m: m \in M, 1 \leq |m_1| \leq 1/2 c(A_1)\}$ и

$$D_n = \left\{ m: m \in M, 2^{-1} \sum_{k=1}^{n-1} c(A_k) < |m_1| \leq 2^{-1} \sum_{k=1}^n c(A_k) \right\}, \quad n=2, 3, \dots$$

Так как $c(A_k) = c(D_k)$, $k=0, 1, 2, \dots$, $A_k \cap B_n = \emptyset$ для любых k и n , $G_k \cap D_n = \emptyset$ для любых k и n и $\bigcup_{k=0}^\infty (A_k \cup B_k) = \bigcup_{k=0}^\infty (G_k \cup D_k) = Z^s$, то существует взаимно однозначное отображение $\omega: Z^s$ на себя, удовлетворяющее условиям: $\omega(B_n) = G_n$, $k=1, 2, \dots$, и $\omega(A_n) = D_n$, $n=0, 1, 2, \dots$. Это ω является искомым. Действительно, легко проверить, что

$$\omega(\{m: m \in Z^s, |m| \leq r_n\}) = \bigcup_{k=0}^{r_n} K_k = Q_{v_n} \cup \Gamma_n, \quad (5)$$

$$v_n = c(\{k: n_k \leq n\}), \quad \Gamma_n = \left\{ m: m \in M, v_n < |m_1| \leq 2^{-1} \sum_{l=1}^n c(A_l) \right\}.$$

Пусть ряд

$$\sum_{m \in Z^s} \hat{f}(\omega(m)) e^{i\omega(m) \cdot x}$$

является рядом Фурье функции $f \in L^p(T^s)$, $p > 1$, по системе (2). Из (5) следует, что

$$\sum_{|m| \leq r_n} \hat{f}(\omega(m)) e^{i\omega(m) \cdot x} = \sum_{m \in Q_{v_n}} \hat{f}(m) e^{im \cdot x} + \sum_{m \in \Gamma_n} \hat{f}(m) e^{im \cdot x}. \quad (6)$$

Предел первого слагаемого в правой части равенства (6) при $n \rightarrow \infty$ существует и равен $f(x)$ п.в. на T^s (см. (⁶⁻⁸)). Что же касается второго слагаемого, то, являясь отрезком остатка ряда Фурье по системе $\{e^{im_1 \cdot x}\}_{m_1 \in Z}$ функции $x_1 \mapsto (2\pi)^{1-s} \int_{T^{s-1}} f dx_2 \dots dx_s$, принадлежащей $L^p(T)$, в силу теоремы

Карлессона — Ханта (^{3, 4}) при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю п.в. на T^s .

Далее, из равенства (6) следует, что

$$\left\| \sup_n \left| \sum_{|m| \leq r_n} \hat{f}(\omega(m)) e^{i\omega(m) \cdot x} \right| \right\|_{p, T^s} \leq \left\| \sup_n \left| \sum_{m \in Q_{v_n}} \hat{f}(m) e^{im \cdot x} \right| \right\|_{p, T^s} + \left\| \sup_n \left| \sum_{m \in \Gamma_n} \hat{f}(m) e^{im \cdot x} \right| \right\|_{p, T^s}.$$

Следовательно (см. (^{3, 4, 6, 8})), справедливо неравенство (3). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Используя теорему 6, 1 из работы ⁽⁸⁾, можно утверждать, что найденное ω таково, что для $f \in L(lg^+L)^s lg^+lg^+L(T^s)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|m| \leq r_n} \hat{f}(\omega(m)) e^{i\omega(m) \cdot x} = f(x)$$

п.в. на T^s , а для $f \in L(lg^+L)^{s+1}(T^s)$

$$\left\| \sup_n \left| \sum_{|m| \leq r_n} \hat{f}(\omega(m)) e^{i\omega(m) \cdot x} \right| \right\|_{1, T^s} \leq C_1 \int_{T^s} |f| (lg^+|f|)^{s+1} dx + C_2.$$

З а м е ч а н и е 2. Теорема справедлива и в том случае, когда вместо шаровых сумм будем рассматривать $\sum_{m \in W_k}$, где $W_k \subset Z^s$ — конечные множества,

ва, $W_k \subset W_{k+1}$, $k=1, 2, \dots$,

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} W_k = Z^s \text{ и } \lim_{k \rightarrow \infty} c(W_k \setminus W_{k-1}) = \infty.$$

З а м е ч а н и е 3. Рассуждения, доказывающие теорему, приводят также к следующему результату.

Пусть последовательность натуральных чисел $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$, $p_k \uparrow \infty$, выпуклая на $[0, \infty)$ неотрицательная функция ψ и полная ортонормированная в $L^2(a, b)$, $-\infty < a < b < \infty$, система ограниченных функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют условиям:

а) ряд Фурье каждой функции из $\psi(L)(a, b)$ по системе $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится п.в. на $[a, b]$;

б) для любой функции $f \in \psi(L)([a, b]^s)$ почти для всех $x \in [a, b]^s$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m \in \Omega_k} f_m \Phi_m(x) = f(x),$$

где N — множество натуральных чисел, $\Omega_k = \{m: m \in N^s, m_l \leq p_k, l=1, 2, \dots, s\}$, $\Phi_m = \varphi_{m_1} \varphi_{m_2} \dots \varphi_{m_s}$, $f_m = \int_{[a, b]^s} f \Phi_m dx$, $m \in N^s$.

Тогда существует взаимно однозначное отображение ω множества N^s на себя такое, что, какова бы ни была функция $f \in \psi(L)([a, b]^s)$, п.в. на $[a, b]^s$

$$\lim_{|m| \leq R} \sum_{|m| \leq R} f_{\omega(m)} \Phi_{\omega(m)}(x) = f(x).$$

Условиям а) и б) удовлетворяют, например, система Хаара ⁽⁹⁾ (при $p_k = k$, $k \in N$, $\psi(u) = u$) и система Уолша ^(9, 10) (при $p_k = 2^k$, $k \in N$, $\psi(u) = u(lg^+u)lg^+lg^+u$).

З а м е ч а н и е 4*. Конструкция, примененная при доказательстве теоремы, та же, что и в доказательстве теоремы Меньшова (см. ⁽¹¹⁾; ⁽¹³⁾, стр. 367). Утверждение теоремы о сходимости п.в. шаровых частичных сумм в случае, когда $p=2$, непосредственно следует из (4) и из этой теоремы Меньшова, если ее сформулировать так:

Пусть $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda \in W}$ — произвольное счетное ортонормированное в $L^2(0, 1)$ семейство функций и $\{W_n\}_{n \in N}$ — произвольная возрастающая последовательность непустых конечных подмножеств множества W , в пределе дающих W , и обладающих свойством $\lim_{n \rightarrow \infty} c(W_n \setminus W_{n-1}) = \infty$.

* Это замечание принадлежит О. Д. Церетели.

Тогда существует такое взаимно однозначное отображение ω множества W на себя, что предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\lambda \in W_n} c_\lambda \varphi_{\omega(\lambda)}(x)$$

существует п.в. на $(0, 1)$, как только $\sum_{\lambda \in W} |c_\lambda|^2 < \infty$ *.

Отсюда, учитывая (4), непосредственно следует также, что для произвольной s -кратной ортонормированной в $L^2(0, 1)$ системы $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda \in N^s}$ в случае, когда $s > 1$, всегда можно указать такое взаимно однозначное отображение ω множества N^s на себя, что предел

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sum_{|\lambda| \leq r} c_\lambda \varphi_{\omega(\lambda)}(x)$$

будет существовать п.в. на $(0, 1)$, как только $\sum_{\lambda \in N^s} |c_\lambda|^2 < \infty$.

Справедливо ли то же самое и при $s=1$, неизвестно. Это старая проблема из теории ортогональных рядов (см., например ⁽¹²⁾; ⁽¹⁴⁾, стр. 165).

Тбилисский математический институт
им. А. М. Размадзе
Академии наук ГрузССР

Поступило
31 X 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ *C. Fefferman*, Ann. Math., v. 94, № 2, 330 (1971). ² *Б. С. Митягин, Е. М. Нукишин*, ДАН, т. 210, № 1, 23 (1973). ³ *L. Carleson*, Acta Math., v. 116, 1–2, 135 (1966). ⁴ *R. A. Hunt*, Proc. Conf. at Southern Illinois University, Edwardsville, 1967; Carbondale, Illinois, 1968, p. 235. ⁵ *Л. Е. Диксон*, Введение в теорию чисел, Тбилисп, 1941. ⁶ *C. Fefferman*, Bull. Am. Math. Soc., v. 77, № 5, 744 (1971). ⁷ *Н. Р. Тевзадзе*, Сообщ. АН ГрузССР, т. 58, № 2, 277 (1970). ⁸ *P. Sjölin*, Ark. Math., B. 9, № 1, 65 (1971). ⁹ *О. П. Дзагнидзе*, Сообщ. АН ГрузССР, т. 34, № 2, 271 (1964). ¹⁰ *P. Sjölin*, Ark. Mat., B. 7, № 42, 551 (1969). ¹¹ *Д. Е. Меньшов*, Уч. зап. МГУ, т. 2, в. 135, 3 (1949). ¹² *П. Л. Ульянов*, УМН, т. 19, в. 1, 3 (1964). ¹³ *С. Качмаж, Г. Штейнгауз*, Теория ортогональных рядов, М., 1958. ¹⁴ *Г. Алексин*, Проблемы сходимости ортогональных рядов, М., 1963. ¹⁵ *В. А. Рохлин*, Матем. сборн., т. 25 (67), в. 1, 107 (1949).

* Настоящая формулировка, являясь более общей по сравнению с оригинальной, легко из нее следует. Действительно, пусть $m_n = c(W_n)$, $n \in N$, и η — взаимно однозначное отображение N на W такое, что $\eta(\{1, 2, \dots, m_n\}) = W_n$, $n \in N$. Легко проверить, что искомым отображением ω будет $\eta \circ \omega_1 \circ \eta^{-1}$, где ω_1 — взаимно однозначное отображение на себя, найденное для системы $\{\varphi_{\eta(n)}\}_{n \in N}$ и последовательности $\{m_n\}_{n \in N}$ по теореме Меньшова.

Теорема Меньшова, очевидно, остается справедливой и для систем функций, определенных на множествах конечной s -кратной меры пространства R^s , $s \geq 1$, или, более общо, на пространствах с мерой. изоморфных (в смысле теории меры) конечному отрезку с мерой Лебега. (Описание таких пространств дано в ⁽¹⁵⁾.)