УДК 512.542+514.13+519.725+519.713+512.55 DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_2_67_7
EDN: QCYRRH

ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ КЛАССОВ КОНЕЧНЫХ ГРУПП ЧЕРЕЗ ПРИЗМУ ПРИЛОЖЕНИЙ. I

А. Ф. Васильев[1], В. И. Мурашко[1], В. Г. Сафонов[2]

[1]*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*
[2]*Институт математики НАН Беларуси*, *Минск*

PROBLEMS OF THE THEORY OF CLASSES OF FINITE GROUPS THROUGH THE PRISM OF APPLICATIONS. I

A. F. Vasil'ev[1], V. I. Murashka[1], V. G. Safonov[2]

[1]*Francisk Skorina Gomel State University*
[2]*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus*, *Minsk*

Аннотация. В обзоре обсуждаются приложения теории классов конечных групп в теории кодирования, в теории компактных римановых поверхностей, в теории формальных языков и при изучении решений уравнения Янга – Бакстера. По каждому из направлений приводятся основные результаты и открытые проблемы.

Ключевые слова: *конечная группа*, *класс групп*, *формация*, *групповой код*, *гурвицева группа*, *риманова поверхность*, *формальный язык*, *уравнение Янга – Бакстера*.

Для цитирования: *Васильев*, *А. Ф.* Проблемы теории классов конечных групп через призму приложений. I / А. Ф. Васильев, В. И. Мурашко, В. Г. Сафонов // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 2 (67). – С. 7–16. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_2_67_7. – EDN: QCYRRH

Abstract. The paper analyzes the applications of the theory of finite groups in the coding theory, in the theory of compact Riemann surfaces, in the theory of formal languages and in the studying of the solutions of the Yang – Baxter equation. The main results and open problems are given for each of these directions.

Keywords: *finite group*, *class of groups*, *formation, group code*, *Hurwitz group*, *Riemann surface*, *formal language*, *Yang – Baxter equation*.

For citation: *Vasil'ev*, *A. F.* Problems of the theory of classes of finite groups through the prism of applications. I / A. F. Vasil'ev, V. I. Murashka, V. G. Safonov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 2 (67). – P. 7–16. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_2_67_7 (in Russian). – EDN: QCYRRH

Введение

Если не оговорено иное, все рассматриваемые группы конечны. Понятие группы является центральным инструментом современной науки, используемым для изучения симметрии. Классические приложения теории групп изложены, например, в [1], [2]. В настоящее время список приложений теории группы включает современную кристаллографию [3], квантовую физику [4], спектроскопию [5], вирусологию [6], генетику [7], криптографию [8] и машинное обучение [9], но не исчерпывается указанными областями.

Одним из значимых методов изучения групп, который восходит к истокам теории групп – работам Э. Галуа и возникшем в них понятию разрешимой группы, является метод классов групп. Напомним, что классом групп называется множество групп, содержащее вместе со всякой своей группой и все ей изоморфные группы. Классы групп, в частности, являются важным объектом в теориях радикала в группах, многообразий, формаций, классов Фиттинга и подгрупповых функторов. Одним из активно развивающихся направлений теории классов групп является теория формаций, возникшая благодаря работе В. Гашюца 1963 года. Результаты данной теории можно найти в монографиях Б. Хупперта [10], Л. А. Шеметкова [11], Л. А. Шеметкова и А. Н. Скибы [12], К. Дёрка и Т. Хоукса [13], А. Н. Скибы [14], С. Ф. Каморникова и М. В. Селькина [15], А. Баллестера-Болинше и Л. М. Эсквейро [16], В. Го [17], А. А. Трофимука [18].

Данная работа начинает цикл статей о приложениях теории конечных групп и их классов. Целью данной части является рассмотрение четырёх областей – групповых кодов, гурвицевых групп, теории формальных языков, теоретико-множественных решений уравнения Янга – Бакстера – в которых стоят открытые проблемы, сформулированные в рамках теории классов групп. Данные области могут служить дальнейшими точками роста современной теории классов групп, в том числе и формаций.

1 Некоторые достижения современной теории классов групп

В настоящее время теория классов групп (формаций, классов Фиттинга и Шунка) активно развивается в рамках Гомельской алгебраической школы, с достижениями и направлениями работы которой можно ознакомиться, например, в [19].

Одним из основных методов изучения строения группы является изучение её действия на факторах главного ряда. Напомним [12, с. 127–128], что главный фактор H/K группы G называется *$\mathfrak{F}$-центральным*, если $(H/K)\rtimes(G/C_G(H/K))\in\mathfrak{F}$. Л. А. Шеметков [20, вопрос 4.1] поставил следующую проблему в 1997 году: «*Описать множество формаций $\mathfrak{F}$ со следующим свойством $\mathfrak{F}=(G\mid$ всякий главный фактор G является $\mathfrak{F}$-центральным$)$*». Такие формации были названы *Z-насыщенными* [21]. Как было отмечено Л.А. Шеметковым, множество *Z*-насыщенных формаций содержит все композиционные (в частности, локальные) формации, играющие центральную роль в современной теории классов групп, но не исчерпывается ими. Решению указанной проблемы Л. А. Шеметкова посвящены работы А. Баллестера-Болинше и М. Д. Перец-Рамос [22] в разрешимом случае и В. И. Мурашко [21] – в произвольном. В настоящее время данный тип формаций активно применяется для решения задач теории формаций (см., например, [23]–[25]).

В теории групп важное место занимают различные длины групп. В рамках теории классов групп различные длины рассматривались в работах Л. А. Шеметкова, А. К. Макана, А. Баллестера-Болинше, М. Д. Перец-Рамос, А. Хелиэль, М. Аль-Шомрани, В. С. Монахова и А. А. Трофимука. Ярким примером таких длин является нильпотентная длина разрешимой группы. Аналоги данной длины в классе всех групп были введены Е. И. Хухро и П. Шумяцким [26], [27]. Через $\mathrm{F}^*(G)$ обозначается обобщённая подгруппа Фиттинга группы *G*, т. е. наибольшая нормальная квазинильпотентная подгруппа *G*. Напомним [26], [27], что *обобщённая высота Фиттинга* $h^*(G)$ группы *G* – наименьшее число *h* такое, что $\mathrm{F}^*_{(h)}(G)=G$, где $\mathrm{F}^*_{(0)}(G)=1$, а $\mathrm{F}^*_{(i+1)}(G)$ – прообраз $\mathrm{F}^*(G/\mathrm{F}^*_{(i)}(G))$; пусть *p* – простое число, $1=G_0\le G_1\le\ldots\le G_{2h+1}=G$ – кратчайший нормальный ряд, в котором для нечётных *i* фактор G_{i+1}/G_i является *p*-разрешимым (возможно, тривиальным), а для чётных *i* фактор G_{i+1}/G_i является непустым прямым произведением неабелевых простых групп, тогда $h=\lambda_p(G)$ называется *не p-разрешимой длиной* группы *G*; $\lambda_2(G)=\lambda(G)$ – *неразрешимая длина* группы *G*. Изучению данных длин посвящены, в частности, работы Ф. Фумагалли, Ф. Лайнена и О. Пульизи [28], Р. Гуральника и Г. Трейси [29], В.И. Мурашко и А.Ф. Васильева [30]. Отметим, что для разрешимой группы обобщённая высота Фиттинга совпадает с нильпотентной длинной.

Хорошо известно, что группа нильпотентна тогда и только тогда, когда все её силовские (или циклические примарные, или максимальные) подгруппы субнормальны. А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева и В. Н. Тютянов предложили следующее обобщение субнормальности [31, определение 1]: подгруппа *H* группы *G* называется *$\mathbb{P}$-субнормальной*, если $H=G$ или найдется цепь подгрупп $H=H_0<H_1<\ldots<H_n=G$ такая, что $|H_i:H_{i-1}|$ – простое число для любого $1\le i\le n$. Известную теорему Б. Хупперта можно переформулировать следующим образом: группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда все её максимальные подгруппы $\mathbb{P}$-субнормальны. Однако, $\mathbb{P}$-субнормальность всех силовских [31] или циклических примарных [32] подгрупп не приводит к сверхразрешимости группы. Тем не менее оба этих случая приводят к классам групп $w\mathfrak{U}$ и $v\mathfrak{U}$, близким по свойствам к сверхразрешимым, в частности, являющимися наследственными насыщенным формациями [31], [32]. Указанные работы легли в основу направления изучения групп с арифметическим вложением систем подгрупп (силовских, циклических, примарных) и нашли применение в работах А. Ф. Васильева, Т. И. Васильевой, В. Н. Тютянова, В. С. Монахова, И. Л. Сохор, В. Н. Княгиной, А. А. Трофимука, В. И. Мурашко, А. Баллестера-Болиньше, С. Маданха, М. Педраза-Агулера, С. Ву, В. М. Факьех, А. Луккини, Б. Немми. Отметим, что в указанных исследованиях важную роль играют классы $\mathfrak{NA}$ и $\mathfrak{N}\mathcal{A}$ групп с нильпотентными коммутантом и обобщённым коммутантом соответственно. Известно, что нильпотентная длина сверхразрешимой группы ограничена 2, но нильпотентная длина групп из классов $w\mathfrak{U}$ и $v\mathfrak{U}$ не ограничена.

В настоящее время активно развивается теория σ-свойств А. Н. Скибы [33], т. е. изучение свойств групп и их классов, определяемых данным разбиением σ множества простых чисел. Классические результаты теории групп получаются в этой теории, когда σ – или разбиение множества всех простых чисел на одноэлементные подмножества, или состоит из одного элемента. Важными примерами таких свойств являются σ-нильпотентность, σ-разрешимость, σ-субнормальность и σ-перестановочность. В настоящее время эта теория развивается широким кругом математиков из более чем 12 стран. Отметим, что А. Н. Скибой, В. Г. Сафоновым, И. Н. Сафоновой и их соавторами (см., например, [34]–[36]) активно развиваются σ-аналоги локальных и композиционных (Бэра-локальных) формаций.

2 Линейные коды и классы групп

Пусть $\mathbb{F}$ – конечное поле. Напомним, что линейным кодом над $\mathbb{F}$ длины *n* и размерности *k* называется линейное подпространство *C* размерности *k* линейного пространства $\mathbb{F}^n$. Векторы из *C* называются кодовыми словами. Расстояние кода – это минимальное расстояние между различными кодовыми словами, то есть количество позиций, в которых они различаются. Известно, что код с минимальным расстояние *d* может обнаруживать $d-1$ ошибку и исправлять $\left[\frac{d-1}{2}\right]$ ошибок. Линейный код длины *n*, размерности *k* и минимального расстояния *d* называется [*n*, *k*, *d*]-кодом. Изучение групповых кодов началось ещё в середине прошлого века (см., например, [37]). Следуя [38], напомним:

***Определение* 2.1.** *Пусть G – группа порядка n, E – базис* $\mathbb{F}^n$ *и* $C \subseteq \mathbb{F}^n$ *– линейный код. Тогда C называется левым G-кодом* (*соответственно, правым G-кодом*; *G-кодом*), *если существует биекция* $\phi: E \to G$ *такая, что линейное продолжение* ϕ *до изоморфизма* $\phi: \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}G$ *отображает C в левый идеал* (*соответственно, правый идеал*; *двусторонний идеал*) *кольца* $\mathbb{F}G$.

Если $\mathfrak{X}$ *– класс групп, то линейный код C называется* (*левым*) $\mathfrak{X}$*-групповым кодом тогда и только тогда, когда C является* (*левым*) *G-кодом для некоторой* $G \in \mathfrak{X}$.

Левый групповой код (*соответственно, групповой код*) *– линейный код, являющийся левым G-кодом* (*соответственно, G-кодом*) *для некоторой группы G.*

Коды Рида – Маллера связаны с классом элементарных абелевых 2-групп [37], [39]. Очевидно, что циклические линейные коды, т. е. линейные коды, содержащие вместе со всяким кодовым словом и все его циклические сдвиги, являются $\mathfrak{X}$-групповыми кодами, где $\mathfrak{X}$ – класс всех циклических групп. В [38] приведен пример нециклического кода $\{(a,a,b,b) \mid a,b \in \mathbb{F}\}$, являющегося Z_4-кодом, где Z_4 – циклическая группа порядка 4.

Пусть $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ – базис $\mathbb{F}^n$. Естественным образом определяется действие симметрической группы S_n степени *n* линейными преобразованиями на $\mathbb{F}^n$: $\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$, где $\sigma \in S_n$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Важной особенностью данного действия является то, что оно переводит [*n*, *k*, *d*]-код в [*n*, *k*, *d*]-код. Напомним, что линейные коды *C*, C' называются перестановочно эквивалентными, если $\sigma(C) = C'$ для некоторого $\sigma \in S_n$. Приведённый выше Z_4-код перестановочно эквивалентен циклическому коду (в обычном смысле). Следуя [40], группа перестановочных автоморфизмов линейного кода *C* длины *n* обозначается:

$$\mathrm{PAut}(C) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(C) = C\}.$$

***Теорема* 2.2** [38]. *Пусть C – линейный код длины n над полем* $\mathbb{F}$, *а G – группа порядка n.*

1. *C является левым G-кодом тогда и только тогда, когда G изоморфна транзитивной подгруппе группы* S_n, *содержащейся в* $\mathrm{PAut}(C)$.

2. *C является G-кодом тогда и только тогда, когда G изоморфна такой транзитивной подгруппе H группы* S_n, *что*

$$H \cup C_{S_n}(H) \subseteq \mathrm{PAut}(C).$$

***Следствие* 2.3** [38]. *Пусть C – линейный код длины n над полем* $\mathbb{F}$ *и* $\mathfrak{X}$ *– класс групп.*

1. *C является левым* $\mathfrak{X}$*-групповым кодом тогда и только тогда, когда* $\mathrm{PAut}(C)$ *содержит регулярную* $\mathfrak{X}$*-подгруппу группы* S_n.

2. *C является* $\mathfrak{X}$*-групповым кодом тогда и только тогда, когда* $\mathrm{PAut}(C)$ *содержит регулярную* $\mathfrak{X}$*-подгруппу H группы* S_n *такую, что* $C_{S_n}(H) \subseteq \mathrm{PAut}(C)$.

В работе [41] было установлено, что для класса групп $\mathfrak{X}$, представленных в произведение циклических групп нечётного порядка, над полем характеристики 2 всякий $\mathfrak{X}$-код комбинаторно эквивалентен абелевому. В этой же работе показано, что аналог данного утверждения для левых кодов неверен. Левые неабелевы коды изучались также, например, в [42]. Примеры групповых кодов, не задающихся абелевыми группами, были приведены, например, в [43]–[45]. В работе [45] показано, что существует S_4-код длины 24 и размерности 6 такой, что его минимальное расстояние больше минимального расстояния всякого абелева кода длины 24 и размерности 6. Ввиду этого естественно возникает проблема:

***Проблема* 2.4.** *Пусть* $\mathfrak{X}$ *– класс групп* (*формация, класс Фиттинга и т.д.*), *содержащий все абелевы группы. Существует ли такая группа* $G \notin \mathfrak{X}$, *что для неё найдутся натуральные числа n, k и поле* $\mathbb{F}$ *такие, что существует* (*левый*) *групповой G-код длины n и размерности k над* $\mathbb{F}$, *для которого любой* (*левый*) $\mathfrak{X}$*-групповой код длины n и размерности k над* $\mathbb{F}$ *имеет меньшее минимальное расстояние*?

Обзор литературы показывает (см., например, [46]–[51]), что неабелевы групповые коды в основном изучались для групп, не сильно сложных с точки зрения теории классов групп. Так, в [51] изучались свойства нильпотентных кодов и их связи с абелевыми кодами. В частности, нильпотентая длина указанных групп не превосходит 2. С другой стороны, нильпотентная длина S_4 равна 3. Напомним, что через $\mathfrak{N}^n$ обозначается класс разрешимых групп, нильпотентная длина которых не превосходит *n*.

***Проблема* 2.5.** *Для данных натуральных n, k и поля* $\mathbb{F}$ *оценить минимальные расстояния* (*левых*) $\mathfrak{X}$*-групповых кодов длины n и размерности k над* $\mathbb{F}$, *где* $\mathfrak{X} \in \{\mathfrak{U}, w\mathfrak{U}, v\mathfrak{U}, \mathfrak{N}\mathfrak{A}, \mathfrak{N}\mathcal{A}, \mathfrak{N}^2, \mathfrak{N}^3\}$.

В теории групп важное место занимает задача изучения строения факторизованной группы в зависимости от строения и вложения её факторов.

***Теорема* 2.6** [38]. *Пусть G – группа. Предположим, что G имеет две абелевы подгруппы A и B такие, что G = AB. Тогда каждый G-код является абелевым групповым кодом.*

Естественной является проблема распространения данного результата на другие классы групп:

***Проблема* 2.7.** *Описать все наследственные формации* $\mathfrak{X}$ *такие, что для любой группы G, представленной в произведение своих попарно перестановочных* $\mathfrak{X}$*-подгрупп, каждый G-код является* (*левым*) $\mathfrak{X}$*-групповым кодом. Интерес представляют частные случаи данной проблемы с ограничениями* (*нормальности, перестановочности, формационной субнормальности и т. д.*) *на подгруппы.*

Теорема 2.6 показывает, что класс абелевых групп содержится в классе групп *G*, для которых каждый *G*-код является абелевым групповым кодом.

***Проблема* 2.8.** *Для данного класса групп* $\mathfrak{X}$ (*например, для классов из проблемы* 2.5) *описать класс групп* (*G* | *всякий G-код является* $\mathfrak{X}$*-групповым кодом*).

В завершении раздела отметим, что многие работы по данной тематике активно используют системы компьютерной алгебры. Поэтому развитие вычислительных и теоретических методов изучения групповых алгебр $\mathfrak{X}$-групп представляет большой интерес в данном направлении.

3 Гурвицевы группы и их обобщения

Важными математическими объектами являются компактные римановы поверхности. А. Гурвиц [52] доказал, что компактная риманова поверхность рода $g > 1$ имеет не более чем $84(g-1)$ автоморфизмов. Группы, для которых достигается максимальное возможное число автоморфизмов, называются гурвицевыми группами. Согласно результатов А. Гурвица, гурвицевы группы – это в точности нетривиальные конечные гомоморфные образы (2, 3, 7)-порожденной группы:

$$\Delta = \langle x, y \mid x^2 = y^3 = (xy)^7 = 1 \rangle.$$

Классическими примерами таких групп являются $PSL(2, 7)$ и $PSL(2, 8)$. Известно, что $G = G'$ для гурвицевой группы *G*. В частности, все такие группы неразрешимы. Основные результаты по таким группам изложены в серии обзоров М. Кондера [53], [54].

Заметим, что были получены значительные достижения в описании простых гурвицевых групп. Про строение непростых гурвицевых групп известно не так много. А. М. Макбет [55] показал, что если $G \simeq \Delta / K$ – гурвицева группа порядка $84(g-1)$, то $H \simeq \Delta / (K'K^m)$ – гурвицева группа порядка $84(g-1)m^{2g}$, имеющая нормальную абелеву подгруппу порядка m^{2g}, фактор группа по которой изоморфна *G*.

***Проблема* 3.1.** *Пусть p – простое число и n – натуральное число. Существует ли гурвицева группа G, для которой* $\lambda_p(G) = n$?

Согласно результату М. Кондера [56] среди порядков групп, меньших 10^6, только для 32 порядков существуют гурвицевы группы. Поэтому интерес представляет изучение строения произвольных групп автоморфизмов компактных римановых поверхностей. В работе [57] для класса групп $\mathfrak{F}$ и натурального $g \geq 2$ через $N(g, \mathfrak{F})$ был обозначен наибольший порядок $\mathfrak{F}$-группы, которую некоторая компактная риманова поверхность рода *g* допускает в качестве группы автоморфизмов (обозначим класс таких групп через $N(\mathfrak{F})$). В этой же работе была поставлена задача:

***Проблема* 3.2** [57]. *Для класса групп* $\mathfrak{F}$ *найти ограничения на* $N(g, \mathfrak{F})$ *и описать те* $g \geq 2$, *для которых эти ограничения достигаются.*

В работе [58] показано, что $N(g, \mathfrak{S}) \leq 48(g-1)$, где $\mathfrak{S}$ – класс всех разрешимых групп; в [59] показано, что $N(g, \mathfrak{N}) \leq 16(g-1)$, где $\mathfrak{N}$ – класс всех нильпотентных групп; в [60] показано, что $N(g, \mathfrak{U}) \leq 18(g-1)$ для $g \geq 3$, где $\mathfrak{U}$ – класс всех сверхразрешимых групп. В указанных работах приведено бесконечно много *G* для которых данные границы достигаются. Более подробно с указанными результатами можно ознакомится в [57], [61].

Ввиду этого интерес представляет следующий частный случай проблемы 3.2.

***Проблема* 3.3.** *Пусть*

$$\mathfrak{F} \in \{w\mathfrak{U}, v\mathfrak{U}, \mathfrak{N}\mathfrak{A}, \mathfrak{N}\mathcal{A}, \mathfrak{N}^n\}.$$

Необходимо найти ограничения на $N(g, \mathfrak{F})$ *и* *описать те $g \geq 2$, для которых эти ограничения достигаются.*

Описанная в определении $N(g, \mathfrak{F})$ группа, т. е. группа для порядка которой эта граница достигается, не обязательно совпадает со всей группой автоморфизмов поверхности. Тем не менее, из теорем Гурвица и Лагранжа следует, что разрешимая группа автоморфизмов порядка $48(g-1)$ компактной римановой поверхности рода g совпадает со всей группой автоморфизмов этой поверхности.

***Проблема* 3.4.** *Для класса групп $\mathfrak{F}$ и натурального $g \geq 2$ существует ли компактная риманова поверхность рода g, группа автоморфизмов которой принадлежит $\mathfrak{F}$?*

В работе [62] найдены условия, при которых полупрямое произведение *p*-группы с гурвицевой группой является гурвицевой группой. Естественно возникает:

***Проблема* 3.5.** *Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп и группа G представлена в произведение своих попарно перестановочных подгрупп. При каких условиях на них группа G принадлежит $N(\mathfrak{F})$?*

В завершении раздела отметим, что помимо изучения групп автоморфизмов компактных римановых поверхностей интерес представляют группы автоморфизмов компактных поверхностей Клейна с границей. Результаты для таких поверхностей, аналогичные рассмотренным в этом разделе, изложены в монографии [63]. С современными исследованиями в данном направлении можно ознакомится, например, в [64], [65].

4 Формальные языки и классы групп

Формальные языки находят приложения во многих современных науках (информатике, лингвистике, биоинформатике и др). Пусть A – конечное непустое множество. Напомним, что (*формальным*) *языком* L называется подмножество свободного моноида A^*. Одним из способов изучения таких языков является сопоставление с каждым из них синтаксического моноида и нахождение связей между свойствами языка и свойствами моноида.

Говорят, что морфизм моноидов $\varphi : A^* \to M$ (соответственно *полно*) *распознает* язык *L*, если $L = \varphi(\varphi^{-1}(L))$ (соответственно и φ сюръективен). Более того, говорят, что язык *L* (соответственно *полно*) *распознается* моноидом *M*, если существует морфизм моноидов из A^* в *M*, который (соответственно полно) распознает *L*. Всякий язык *L* определяет *синтаксическую конгруенцию* на A^* следующим образом: $u \sim_L v$ тогда и только тогда, когда $xvy \in L \Leftrightarrow xuy \in L$ для любых $x, y \in A^*$. Естественный морфизм $\eta : A^* \to A^* / \sim_L$ является *синтаксическим морфизмом* языка *L*. Заметим, что η полностью распознаёт *L*. Язык называется *регулярным* (или *распознаваемым*), если его синтаксический моноид является конечным моноидом. Регулярный язык называется *групповым языком*, если его синтаксический моноид является конечной группой. Известна следующая проблема (см., например, [66, глава 5]):

***Проблема* 4.1.** *Возможна ли классификация регулярных языков A^* в соответствии с алгебраическими свойствами их синсинтаксических моноидов*?

В [66, глава 5] отмечается, что на пути решения этой проблемы имеются две трудности: не всякий моноид является синтаксическим моноидом какого-либо языка и различные языки могут иметь изоморфные синтаксические моноиды. Напомним, что *классом* регулярных языков $\mathcal{L}$ называется отображение, сопоставляющее каждому конечному алфавиту *A* некоторое множество $\mathcal{L}(A^*)$ регулярных языков над A^*; класс регулярных языков $\mathcal{L}$ называется замкнутым относительно:

(*a*) *булевых операций*, если

$$L \cup M, L \cap M, A^* \setminus L \in \mathcal{L}(A^*)$$

для любых $M, L \in \mathcal{L}(A^*)$ и конечного алфавита *A*;

(*b*) *частных*, если для каждого языка $L \in \mathcal{L}(A^*)$ и для каждой пары слов (x, y) из A^* язык $x^{-1}Ly^{-1} = \{u \in A^* \mid xuy \in L\}$ принадлежит $\mathcal{L}$ для любого конечного алфавита *A*;

(*c*) *обратных морфизмов*, если для любого морфизма $\theta : A^* \to B^*$ из $L \in \mathcal{L}(B^*)$ следует $\theta^{-1}(L) \in \mathcal{L}(A^*)$.

Класс регулярных языков $\mathcal{L}$, замкнутый относительно булевых операций, частных и обратных морфизмов называется *потоком* или *псевдомногообразием языков* [66, определение 5.9]. *Формацией языков* [67] называется класс регулярных языков $\mathcal{F}$, замкнутый относительно булевых операций, частных и удовлетворяющий условию: если *L* – язык из $\mathcal{F}(B^*)$ и $\eta : B^* \to M$ – его синтаксический морфизм, то для каждого морфизма моноидов $\alpha : A^* \to B^*$ такого, что $\eta \circ \alpha$ сюръективен, язык $\alpha^{-1}(L)$ принадлежит $\mathcal{F}(A^*)$.

С каждой формацией моноидов $\mathfrak{F}$ (соответственно псевдомногообразием $\mathfrak{M}$) сопоставляется класс языков $\mathcal{F}(\mathfrak{F})$ (соответственно $\mathcal{V}(\mathfrak{M})$), определяемый следующим образом: $\mathcal{F}(\mathfrak{F})(A^*)$ (соответственно $\mathcal{V}(\mathfrak{M})(A^*)$) есть множество языков над A^*, чей синтаксический моноид принадлежит $\mathfrak{F}$ (соответственно $\mathfrak{M}$), для каждого алфавита A.

С каждой формацией языков $\mathcal{F}$ (соответственно псевдомногообразием $\mathcal{V}$) сопоставляется формация моноидов $\mathfrak{F}(\mathcal{F})$ (соответственно псевдомногообразие моноидов $\mathfrak{M}(\mathcal{V})$), порождённая синтаксическими моноидами языков из $\mathcal{F}$.

Эйленберг [68] (см. также [66, теорема 5.11]) в 1976 году установил, что $\mathcal{V}(\mathfrak{M}(\mathcal{V})) = \mathcal{V}$ и $\mathfrak{M}(\mathcal{V}(\mathfrak{M})) = \mathfrak{M}$ для любых псевдомногообразий языков $\mathcal{V}$ и моноидов $\mathfrak{M}$. В [67] данный результат распространен на формации: $\mathcal{F}(\mathfrak{F}(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$ и $\mathfrak{F}(\mathcal{F}(\mathfrak{F})) = \mathfrak{F}$ для любых формаций языков $\mathcal{F}$ и моноидов $\mathfrak{F}$.

Известно описание языков, связанных с формациями всех абелевых групп [66], [68], нильпотентных групп [69], сверхразрешимых групп [70] и разрешимых групп [66], [71]. В работе [72] было показано, как свести описание языков для локальной формации к описанию языков для значений её локального экрана. Следствия данного результаты были записаны для τ-замкнутых локальных формаций [73], σ-локальных формаций [74] и кратно локальных формаций [75]. В этих же работах приведен ряд открытых проблем.

***Проблема* 4.2.** *Описать языки соответствующие:*

(1) [73] *τ-замкнутым разрешимо насыщенным* (*композиционным*, *Бэра-локальным*) *формациям.*

(2) [74] *n-кратно σ-локальным формациям*, *тотально σ-локальным формациям.*

(3) [75] *Бэра-σ-локальным формациям.*

С данной проблемой естественным образом связана

***Проблема* 4.3.** *Описать языки соответствующие τ-замкнутым n-кратно σ-локальным формациям*, *τ-замкнутым тотально σ-локальным формациям и τ-замкнутым Бэра-σ-локальным формациям.*

На наш взгляд, наиболее интересным представляется описание языков соответствующих Бэра-локальным (композиционным, разрешимо насыщенным) формациям. Отметим, что данные формации могут быть выражены с помощью значений своего экрана. Ввиду активного развития в настоящее время теории Z-насыщенных формаций, естественно возникает:

***Проблема* 4.4.** *Разработать методы*, *позволяющие описывать языки*, *соответствующие Z-насыщенным формациям.*

Важным частным примером таких формаций являются ранговые формации. Класс разрешимых групп, ранги главных факторов которых не превосходят n, $n \geq 2$, является примером наследственной ненасыщенной Z-насыщенной формации.

***Проблема* 4.5.** *Для* $n \geq 2$ *описать языки*, *соответствующие классу разрешимых групп*, *ранги главных факторов которых не превосходят n.*

Отметим, что при $n = 1$ в предыдущей проблеме получается формация всех сверхразрешимых групп.

***Проблема* 4.6.** *Описать языки*, *соответствующие классам* $w\mathfrak{U}, v\mathfrak{U}$ *и* $\mathfrak{N}\mathcal{A}$.

Классы из предыдущих двух проблем являются псевдомногообразиями. Важной с точки зрения теории классов групп является формация всех групп, обобщённая высота Фиттинга которых не превосходит n. При $n = 1$ данный класс является формацией всех квазинильпотентных групп.

***Проблема* 4.7.** *Для данного натурального числа n описать языки*, *соответствующие классу групп*, *обобщённая высота Фиттинга которых не превосходит n.*

В завершении раздела отметим также серию работ [76], [77], в которых изучались классы инверсных полугрупп и соответствующие им классы языков.

5 Классы групп и теоретико множественные решения уравнения Янга – Бакстера

Уравнение Янга – Бакстера (YBE) имеет большое значение как в чистой математике, так и в физике, являясь фундаментальной концепцией в этих областях. В частности, оно связано с теорией узлов, группами кос, алгебрами Хопфа, квантовыми группами, конечными группами и их классами, трёхмерными многообразиями и монодромией дифференциальных уравнений. Его истоки можно проследить в исследованиях Ч. Н. Янга [78] и Р. Дж. Бакстера [79] по статистической механике.

Подробно с современными методами теории групп для изучения решений YBE можно ознакомиться, например, в монографии [80]. Напомним, что решение квантового уравнения Янга – Бакстера – это биективное линейное отображение $R : V \otimes V \to V \otimes V$, где V – векторное пространство, такое что $R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}$ и R_{ij} обозначает отображение

$$V \otimes V \otimes V \to V \otimes V \otimes V,$$

действующее как R на (i, j)-м тензорном сомножителе и как тождественное отображение на оставшемся сомножителе. Пусть

$$\varphi : V \otimes V \to V \otimes V$$

– линейное отображение, для которого $\varphi(u \otimes v) = v \otimes u$ для всех $u, v \in V$. Тогда можно проверить, что $R : V \otimes V \to V \otimes V$ является решением квантового уравнения Янга – Бакстера тогда и только тогда, когда $\overline{R} = \varphi R$ удовлетворяет условию $\overline{R}_{12}\overline{R}_{23}\overline{R}_{12} = \overline{R}_{23}\overline{R}_{12}\overline{R}_{23}$. В этом случае говорят, что $\overline{R}$ является решением уравнения Янга – Бакстера. Если X – базис пространства V, а $r : X \times X \to X \times X$ – биективное отображение, для которого

$$(r \times \mathrm{id}_X)(\mathrm{id}_X \times r)(r \times \mathrm{id}_X) = \\ = (\mathrm{id}_X \times r)(r \times \mathrm{id}_X)(\mathrm{id}_X \times r),$$

то r индуцирует решение уравнения Янга – Бакстера. В этом случае говорят, что (X, r) является *теоретико-множественным решением уравнения Янга – Бакстера*, задача изучения которых была поставлена в [81]. Решение данной задачи было начато в работах [82], [83], где рассматривались невырожденные инволютивные решения YBE. Данные работы послужили началом интенсивному изучению инволютивных решений YBE. Пусть (X, r) – теоретико-множественное решение YBE. Тогда обозначают $r(x, y) = (\sigma_x(y), \tau_y(x))$. Говорят, что теоретико-множественное решение (X, r) уравнения Янга – Бакстера является *невырожденным*, если все отображения σ_x и τ_x являются перестановками множества X. Решение (X, r) уравнения Янга – Бакстера называется *инволютивным*, если $r^2 = \mathrm{id}$. *Группой перестановок* решения (X, r) называется подгруппа $\mathcal{G}(X,r)$ группы $\mathrm{Sym}(X)$, порождённая биекциями σ_x для всех $x \in X$, то есть

$$\mathcal{G}(X,r) = \langle \sigma_x \mid x \in X \rangle \le \mathrm{Sym}(X).$$

Группа G называется *инволютивной группой Янга – Бакстера*, или кратко IYB-группой, если существует решение (X, r) уравнения Янга – Бакстера такое, что $G \cong \mathcal{G}(X,r)$.

В [83, теорема 2.15] установлена разрешимость инволютивных групп Янга – Бакстера. Изучению свойств класса IYB посвящена работа [84], в которой поставлена следующая

***Проблема* 5.1.** *Описать класс IYB инволютивных групп Янга – Бакстера.*

В частности [84, следствия 3.1 и 3.2], этот класс замкнут относительно взятия холловых подгрупп. В этой же работе изучались произведения инволютивных групп Янга – Бакстера. С помощью данных результатов в [85, предложение 4.2] было показано, что IYB замкнут относительно полупрямых произведений с абелевыми группами. Как следствие, было установлено [85, следствие 4.3], что всякая разрешимая группа с абелевыми силовскими подгруппами принадлежит IYB. Тем не менее, полное решение проблемы 5.1 еще далеко от завершения. Анализ работ показывает значительную роль методов изучения факторизаций групп при решении проблемы 5.1. Поэтому естественно возникает:

***Проблема* 5.2.** *Пусть группа представлена в произведение своих попарно перестановочных подгрупп. При каких условиях на них группа будет инволютивной группой Янга – Бакстера*?

В [84, следствия 3.8] показано, что всякая нильпотентная группа является подгруппой нильпотентной IYB-группы. Тем не менее [86], существует нильпотентная группа, не являющаяся IYB-группой.

***Проблема* 5.3.** *Описать наименьшую* (*наследственную*) *Z-насыщенную* (*насыщенную*) *формацию*, *содержащую класс IYB.*

Из предыдущих результатов следует, что наименьшая наследственная Z-насыщенная (насыщенная) формация, содержащая все нильпотентные IYB-группы, совпадает с классом нильпотентных групп.

Напомним [87], что *косым левым брейсом* называется тройка $(A,+,\circ)$, в которой $(A,+)$ и $(A,\circ)$ являются (не обязательно абелевыми) группами и

$$a \circ (b + c) = (a \circ b) - a + (a \circ c)$$

выполняется для всех $a, b, c \in A$. Группы $(A,+)$ и $(A,\circ)$ называются соответственно аддитивной и мультипликативной группами косого левого брейса A.

Пусть $\mathfrak{X}$ – класс групп. Косой брейс A называется *косым брейсом типа* $\mathfrak{X}$, если его аддитивная группа принадлежит $\mathfrak{X}$. Косые левые брейсы типа $\mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ – класс всех абелевых групп, называются *левыми брейсами* и были введены в [88]. В [89] группу G назвали $\mathfrak{X}$YB-*группой*, если G изоморфна мультипликативной группе косого левого брейса типа $\mathfrak{X}$. Согласно [84, теорема 2.1 (vi)], группа $(G,\circ)$ является IYB-группой тогда и только тогда, когда на G можно определить бинарную операцию + так, что $(G,+,\circ)$ является левым брейсом.

Произведения $\mathfrak{X}$YB-групп изучались в работе [89]. Отметим, что с косыми левыми брейсами естественным образом связаны тройные факторизации групп, т. е. факторизации групп типа $G = AB = AC = BC$, которые изучались в [90].

В работе [91] изучались длины косых левых брейсов, в том числе в некоторой степени аналогичных обобщенной высоте Фиттинга. Поэтому естественно возникает

***Проблема* 5.4.** *Перенести методы теории длин групп на косые левые брейсы.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Артамонов*, *В. А.* Группы и их приложения в физике, химии, кристаллографии : учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений /

В. А. Артамонов, Ю. Л. Словохотов. – Издательский центр «Академия», 2005. – 512 с.

2. *Поклонский*, *Н. А.* Конечные группы симметрии. Теория и приложения / Н. А. Поклонский, А. Т. Власов, С. А. Вырко. – Мн. : Беларуская навука, 2024. – 507 с.

3. *Piwek*, *P.* Distinguishing crystallographic groups by their finite quotients / P. Piwek, D. Popovic, G. Wilkes // J. Algebra. – 2021. – Vol. 565. – P. 548–563.

4. *Kornyak*, *V. V.* Finite groups and quantum physics / V. V. Kornyak // Physics of Atomic Nuclei. – 2013. – Vol. 76, № 2. – P. 240–257.

5. *Pain*, *J.-C.* Sum rules for Clebsch – Gordan coefficients from group theory and Runge – Lenz-Pauli vector / J.-C. Pain // J. Phys. Commun. – 2022. – № 6. – Article 055007.

6. *Finite symmetries in agent-based epidemic models* / G. M. Nakamura, A. C. P. Monteiro, G. C. Cardoso, A. S. Martinez // Math. Comput. Appl. – 2019. – Vol. 24, № 2. – Article 44.

7. *Antoneli*, *F.* Symmetry breaking in the genetic code: Finite groups / F. Antoneli, M. Forger // Math. Comp. Model. – 2011. – Vol. 53, № 7–8. – P. 1469–1488.

8. *Криптология* : учебник / Ю. С. Харин, С. В. Агиевич, Д. В. Васильев, Г. В. Матвеев. – Мн. : БГУ, 2023. – 512 с.

9. *Kondor*, *R.* Group theoretical methods in machine learning. Ph.D. thesis / R. Kondor. – Columbia University, 2008. – 111 p.

10. *Huppert*, *B.* Endliche Gruppen I. / B. Huppert. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer, 1967. – 793 p.

11. *Шеметков*, *Л. А.* Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.

12. *Шеметков*, *Л. А.* Формации алгебраических систем / Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба. – М. : Наука, 1989. – 256 с.

13. *Doerk*, *K.* Finite soluble groups / K. Doerk, T. Hawkes. – Berlin – New York : Walter de Gruyter, 1992. – 891 p.

14. *Скиба*, *А. Н.* Алгебра формаций / А. Н. Скиба. – Мн. : Беларуская навука, 1997. – 240 с.

15. *Каморников*, *С. Ф.* Подгрупповые функторы и классы конечных групп / С. Ф. Каморников, М. В. Селькин. – Мн. : Беларуская навука, 2003. – 254 с.

16. *Ballester-Bolinches*, *A.* Classes of Finite Groups / A. Ballester-Bolinches, L. M. Ezquerro. – Dordrecht : Springer, 2006. – 385 p.

17. *Guo*, *W.* Structure Theory for Canonical Classes of Finite Groups / W. Guo. – Berlin – Heidelberg : Springer-Verlag, 2015. – 359 p.

18. *Трофимук*, *А. А.* Конечные факторизуемые группы с ограничениями на сомножители / А. А. Трофимук. – Мн. : Издательский центр БГУ, 2021. – 262 с.

19. *О становлении и развитии исследований по алгебре в Гомельском государственном университете*: *история*, *результаты и перспективы* / А. Ф. Васильев, В. С. Монахов, В. Г. Сафонов, А. Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 3 (64). – С. 7–15.

20. *Shemetkov*, *L. A.* Frattini extensions of finite groups and formations / L. A. Shemetkov // Comm. Algebra. – 1997. – Vol. 23, № 3. – P. 955–964.

21. *Мурашко*, *В. И.* К вопросам Шеметкова, Баллестера-Болиншеса и Перес-Рамос теории конечных групп / В. И. Мурашко // Матем. заметки. – 2022. – Т. 112, № 6. – С. 839–849.

22. *Ballester-Bolinches*, *A.* On a question of L. A. Shemetkov / A. Ballester-Bolinches, M. D. Perez-Ramos // Comm. Algebra. – 1999. – Vol. 27, № 11. – P. 5615–5618.

23. *Мурашко*, *В. И.* К вопросу Шеметкова об $\mathfrak{F}$-гиперцентре / В. И. Мурашко // Матем. заметки. – 2024. – Т. 115, № 5. – С. 759–771.

24. *Murashka*, *V. I.* Regular saturated formations of finite soluble groups / V. I. Murashka // J. Group Theory. – 2025. – Vol. 28, № 6. – P. 1307–1324.

25. *Васильев*, *А. Ф.* Конечные группы с тремя несопряженными максимальными формационными подгруппами / А. Ф. Васильев, В. И. Мурашко, А. К. Фурс // Матем. заметки. – 2022. – Т. 111, № 3. – С. 354–364.

26. *Khukhro*, *E. I.* On the length of finite groups and of fixed points / E. I. Khukhro, P. Shumyatsky // Proc. Amer. Math. Soc. – 2015. – Vol. 143, № 9. – P. 3781–3790.

27. *Khukhro*, *E. I.* On the length of finite factorized groups / E. I. Khukhro, P. Shumyatsky // Ann. Mat. Pura Appl. – 2015. – Vol. 194, № 6. – P. 1775–1780.

28. *Fumagalli*, *F.* A reduction theorem for nonsolvable finite groups / F. Fumagalli, F. Leinen, O. Puglisi // Isr. J. Math. – 2019. – Vol. 232, № 1. – P. 231–260.

29. *Guralnick*, *R. M.* On the generalized Fitting height and insoluble length of finite groups / R. M. Guralnick, G. Tracey // Bull. London Math. Soc. – 2020. – Vol. 52, № 5. – P. 924–931.

30. *Murashka*, *V. I.* On the lengths of mutually permutable products of finite groups / V. I. Murashka, A. F. Vasil'ev // Acta Math. Hungar. – 2023. – Vol. 170, № 1. – P. 412–429.

31. *Vasil'ev*, *A. F.* On the finite groups of supersoluble type / A. F. Vasil'ev, T. I. Vasil'eva, V. N. Tyutyanov // Sib. Math. J. – 2010. – Vol. 51, № 6. – P. 1004–1012.

32. *Monakhov*, *V. S.* Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups / V. S. Monakhov, V. N. Kniahina // Ricerche mat. – 2013. – Vol. 62. – P. 307–322.

33. *Skiba*, *A. N.* On σ-subnormal and σ-permutable subgroups of finite groups / A.N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.

34. *Chi*, *Z.* On *n*-multiply σ-local formations of finite groups / Z. Chi, V. G. Safonov, A. N. Skiba // Comm. Algebra. – 2019. – Vol. 47, № 3. – P. 957–968.

35. *Safonov*, *V. G.* On Baer-σ-local forma-tions of finite groups / V. G. Safonov, I. N. Safonova, A. N. Skiba // Comm. Algebra. – 2020. – Vol. 48, № 9. – P. 4002–4012.

36. *Сафонов*, *В. Г.* О σ-локальных классах конечных групп / В. Г. Сафонов, И. Н. Сафонова // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2025. – Т. 61, № 4. – С. 271–287.

37. *Berman*, *S. D.* On the theory of group codes / S. D. Berman // Kibernetika. – 1967. – Vol. 3. – P. 31–39.

38. *Bernal*, *J. J.* An intrinsical description of group codes / J. J. Bernal, Á. del Río, J. J. Simóon // Des. Codes Cryptogr. – 2009. – Vol. 51, № 3. – P. 289–300.

39. *Assmus*, *E. F.* On Berman's characterization of the Reed-Muller codes / E. F. Assmus // J. Stat. Plan. Inference. – 1996. – Vol. 56, № 1. – P. 17–21.

40. *Huffman*, *W. C.* Codes and groups / W. C. Huffman // Handbook of Coding Theory / Ed. by V. S. Pless, W. C. Huffman, R. A. Brualdi. – Vol. 2. – Amsterdam : North-Holland, 1998. – P. 1345–1440.

41. *Sabin*, *R. E.* Metacyclic error-correcting codes / R. E. Sabin, S. J. Lomonaco // AAECC. – 1995. – Vol. 6, № 3. – P. 191–210.

42. *Olteanu*, *G.* Construction of minimal non-abelian left group codes / G. Olteanu, I. Van Gelder // Des. Codes Cryptogr. – 2015. – Vol. 75, № 3. – P. 359–373.

43. *When are all group codes of a non-commutative group Abelian* (*a computational approach*)? / C. G. Pillado, S. González, V. T. Markov [et al.] // J. Math. Sci. – 2012. – Vol. 186, № 4. – P. 578–585.

44. *Group codes over non-abelian groups* / C. G. Pillado, S. González, C. Martínez [et al.] // J. Algebra Appl. – 2013. – Vol. 12, № 07. – Article 1350037.

45. *New examples of non-abelian group codes* / C. G. Pillado, S. González, V. Markov [et al.] // Adv. Math. Commun. – 2016. – Vol. 10, № 1. – P. 1–10.

46. *Assuena*, *S.* Good codes from metacyclic groups II / S. Assuena // J. Algebra Appl. – 2020. – Vol. 21, № 02. – Article 2250040.

47. *Chahal*, *S.* Central and non-central metacyclic codes / S. Chahal, S. Maheshwary // Finite Fields Their Appl. – 2025. – Vol. 106. – Article 102615.

48. *Dutra*, *F. S.* Semisimple group codes and dihedral codes / F. S. Dutra, R. A. Ferraz, C. P. Milies // Algebra Discrete Math. – 2009. – Vol. 8, № 3. – P. 28–48.

49. *Ferraz*, *R. A.* Left ideals of matrix rings and error-correcting codes / R. A. Ferraz, C. Polcino Milies, E. Taufer // AAECC. – 2021. – Vol. 32, № 3. – P. 311–320.

50. *Gupta*, *S.* Central and non central codes of dihedral 2-groups / S. Gupta, P. Rani // Algebra Discrete Math. – 2022. – Vol. 33, № 1. – P. 87–98.

51. *Duarte*, *A.* Nilpotent group codes / A. Duarte, A. Pereira, C. Polcino Milies // J. Algebra Appl. – 2024. – Vol. 23, № 03. – Article 2450060.

52. *Hurwitz*, *A.* Ueber algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich / A. Hurwitz // Math. Ann. – 1893. – Vol. 41. – P. 403–442.

53. *Conder*, *M.* Hurwitz groups: A brief survey / M. Conder // Bull. Amer. Math. Soc. – 1990. – Vol. 23, – № 2. – P. 359–370.

54. *Conder*, *M.* An update on Hurwitz groups / M. Conder // Groups Complex. Cryptol. – 2010. – Vol. 2, № 1. – P. 35–49.

55. *Macbeath*, *A. M.* On a Theorem of Hurwitz / A. M. Macbeath // Proc. Glasgow Math. Assoc. – 1961. – Vol. 5, № 2. – P. 90–96.

56. *Conder*, *M.* The genus of compact riemann surfaces with maximal automorphism group / M. Conder // J. Algebra. – 1987. – Vol. 108, № 1. – P. 204–247.

57. *Gromadzki*, *G.* Maximal groups of automorphisms of compact riemann surfaces in various classes of finite groups. / G. Gromadzki // RACSAM. – 1988. – Vol. 82, № 2. – P. 267–275.

58. *Chetiya*, *B. P.* On genuses of compact Riemann surfaces admitting solvable automorphism groups / B. P. Chetiya // Indian J. PureAppl. Math. – 1981. – Vol. 12. – P. 1312–1318.

59. *Zomorrodian*, *R.* Nilpotent automorphism groups of Riemann surfaces / R. Zomorrodian // Trans. Amer. Math. Soc. – 1985. – Vol. 288. – P. 241–255.

60. *Gromadzki*, *G.* Supersoluble groups of automorphisms of compact Riemann surfaces / G. Gromadzki, C. MacLachlan // Glasg. Math. J. – 1989. – Vol. 31, № 3. – P. 321–327.

61. *Schweizer*, *A.* On the exponent of the automorphism group of a compact Riemann surface / A. Schweizer // Arch. Math. – 2016. – Vol. 107, № 4. – P. 329–340.

62. *Thomas*, *R. M.* Generating sets for finite groups / R. M. Thomas // Discrete groups and geometry. – Vol. 173 of London Math. Soc. Lecture Note Ser. – Cambridge Univ. Press, 1992. – P. 234–242.

63. *Automorphism Groups of Compact Bordered Klein Surfaces* / E. Bujalance, J. J. Etayo, J. M. Gamboa, G. Gromadzki. – Berlin, Heidelberg: Springer, 1990. – 212 p.

64. *Anasagasti*, *I.* Full automorphism groups of large order of compact bordered Klein surfaces /

I. Anasagasti, F. J. Cirre // J. Algebra. – 2023. – Vol. 628. – P. 163–188.

65. *Gromadzki*, *G*. On the orders of the largest groups of automorphisms of bordered Klein surfaces and their asymptotic's / G. Gromadzki // J. Algebra. – 2025. – Vol. 680. – P. 134–147.

66. *Лаллеман*, *Ж*. Полугруппы и комбинаторные приложения : пер. с англ. / Ж. Лаллеман. – М. : Мир, 1985. – 440 с.

67. *Ballester-Bolinches*, *A*. Formations of finite monoids and formal languages: Eilenberg's variety theorem revisited / A. Ballester-Bolinches, J.-É. Pin, X. Soler-Escrivá // Forum Math. – 2014. – Vol. 26, № 6. – P. 1737–1761.

68. *Eilenberg*, *S*. Automata, Languages, and Machines. Volume B / S. Eilenberg. – NewYork: Academic Press, 1976. – 403 p.

69. *Thérien*, *D*. Subword counting and nilpotent groups / D. Thérien // Combinatorics on Words. – Toronto : Academic Press, 1983. – P. 297–305.

70. *Carton*, *O*. Languages recognized by finite supersoluble groups / O. Carton, J.-É. Pin, X. Soler-Escrivá // J. Autom. Lang. Comb. – 2009. – Vol. 14, № 2. – P. 149–161.

71. *Straubing*, *H*. Families of recognizable sets corresponding to certain varieties of finitemonoids / H. Straubing // J. Pure Appl. Algebra. – 1979. – Vol. 15. – P. 305–318.

72. *Ballester-Bolinches*, *A*. Languages associated with saturated formations of groups / A. Ballester-Bolinches, J.-É. Pin, X. Soler-Escrivá // Forum Math. – 2015. – Vol. 27, № 3. – P. 1471–1505.

73. *Tsarev*, *A*. Formations of finite monoids and their applications: formations of languages and τ-closed saturated formations of finite groups / A. Tsarev // Ann Univ Ferrara. – 2019. – Vol. 65, № 2. – P. 369–374.

74. *Tsarev*, *A*. Laws of the Lattices of σ-Local Formations of Finite Groups / A. Tsarev // Mediterr. J. Math. – 2020. – Vol. 17, № 3. – Article 75.

75. *Tsarev*, *A*. Classes of monoids with applications: formations of languages and multiply local formations of finite groups / A. Tsarev, A. Kukharev // Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser. – 2021. – Vol. 70, № 3. – P. 1257–1268.

76. *Gomes*, *G. M. S*. Formations and i-Fitting classes of inverse semigroups, congruences and languages / G. M. S. Gomes, A. C. C. Monteiro // Semigroup Forum. – 2024. – Vol. 109, № 1. – P. 87–115.

77. *Gomes*, *G. M. S*. i-Fitting-Formations on Inverse Semigroups / G. M. S. Gomes, A. C. C. Monteiro // Semigroup Forum. – 2025. – Vol. 111, № 2. – P. 446–468.

78. *Yang*, *C. N*. Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulsivedelta-function interaction / C. N. Yang // Phys. Rev. Lett. – 1967. – Vol. 19. – P. 1312–1315.

79. *Baxter*, *R. J*. Partition function of the eight-vertex lattice model / R. J. Baxter // Ann. Physics. – 1972. – Vol. 70. – P. 193–228.

80. *Cedó*, *F*. Groups, Radical Rings, and the Yang-Baxter Equation / F. Cedó, L. Vendramin. Progress in Mathematics. – Birkhäuser Cham, 2026. – 298 p.

81. *Drinfel'd*, *V. G*. On some unsolved problems in quantum group theory / V. G. Drinfel'd // Quantumgroups (Leningrad, 1990). – Lecture Notes in Math. № 1510. – Berlin: Springer, 1992. – P. 1–8.

82. *Gateva-Ivanova*, *T*. Semigroups of *i*-type / T. Gateva-Ivanova, M. Van den Bergh // J. Algebra. – 1998. – Vol. 206, № 1. – P. 97–112.

83. *Etingof*, *P*. Set-theoretical solutions to the quantum Yang–Baxter equation / P. Etingof, T. Schedler, A. Soloviev // Duke Math. J. – 1999. – Vol. 100, № 2. – P. 169–209.

84. *Cedó*, F. Involutive Yang-Baxter groups / F. Cedó, E. Jespers, Á. del Río // Trans. Amer. Math. Soc. – 2010. – Vol. 362. – P. 2541–2558.

85. *Ben David*, *N*. On groups of I-type and involutive Yang-Baxter groups / N. Ben David, Y. Ginosar // J. Algebra. – 2016. – Vol. 458. – P. 197–206.

86. *Bachiller*, *D*. Counterexample to a conjecture about braces / D. Bachiller // J. Algebra. – 2016. – Vol. 453. – P. 160–176.

87. *Guarnieri*, *L*. Skew braces and the Yang – Baxter equation / L. Guarnieri, L. Vendramin // Math. Comp. – 2017. – Vol. 86, № 307. – P. 2519–2534.

88. *Rump*, *W*. Braces, radical rings, and the quantum Yang – Baxter equation / W. Rump // J. Algebra. – 2007. – Vol. 307. – P. 153–170.

89. *On Yang – Baxter groups* / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, P. Jiménez-Seral, V. Pérez-Calabuig // Quaest. Math. – 2023. – Vol. 46, № 7. – P. 1273–1281.

90. *Categories of Skew Left Braces and Trifactorised Groups* / A. Ballester-Bolinches, R. Esteban-Romero, P. Pérez-Altarriba, V. Pérez-Calabuig // Comm. Math. Stat. – 2026. – DOI: https://doi.org/10.1007/s40304-025-00465-2

91. *Cedó*, *F*. Skew left braces of nilpotent type / F. Cedó, A. Smoktunowicz, L. Vendramin // Proc. London Math. Soc. – 2019. – Vol. 118, № 6. – P. 1367–1392.

Работа второго автора выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (БРФФИ-РНФ М, *проект* Ф23РНФМ-63).

Поступила в редакцию 14.05.2026.

Информация об авторах

Васильев Александр Федорович – д.ф.-м.н., профессор
Мурашко Вячеслав Игоревич – к.ф.-м.н., доцент
Сафонов Василий Григорьевич – д.ф.-м.н., профессор