

УДК 536.44; 524.882

DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2026\\_2\\_67\\_35](https://doi.org/10.54341/20778708_2026_2_67_35)

EDN: UXVKOL

## О СПЕЦИФИКЕ СЕМЕЙСТВА ИЗОТЕРМ БОРНА – ИНФЕЛЬДОВСКИХ АДС ЧЁРНЫХ ДЫР

О. В. Новикова, Г. Ю. Тюменков

*Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины*

## ON THE SPECIFICS OF THE ISOTHERMS FAMILY OF BORN – INFELD AdS BLACK HOLES

V. U. Novikava, G. Yu. Tyumenkov

*Francisk Skorina Gomel State University*

**Аннотация.** Проанализировано поведение семейств изотерм чёрных дыр Райсснера – Нордстрёма (РН) и Борна – Инфельда (БИ) в пространстве анти-де Ситтера (АдС) на основе термодинамических уравнений состояния (УС) вида  $P = P(T, r_+)$ , параметризованных горизонтом событий  $r_+$ . Показано, что у БИ-АдС чёрных дыр, в отличие от РН-АдС чёрных дыр, в семействе изотерм присутствуют две критические изотермы: одна с «ван-дер-ваальсовским» (вдВ), а другая с «неван-дер-ваальсовским» (нвдВ) характером происхождения.

**Ключевые слова:** уравнение состояния, семейство изотерм, критическая изотерма, пространство анти-де Ситтера, чёрная дыра Райсснера – Нордстрёма, чёрная дыра Борна – Инфельда.

**Для цитирования:** Новикова, О. В. О специфике семейства изотерм Борна – Инфельдовских АдС чёрных дыр / О. В. Новикова, Г. Ю. Тюменков // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 2 (67). – С. 35–39. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2026\\_2\\_67\\_35](https://doi.org/10.54341/20778708_2026_2_67_35). – EDN: UXVKOL

**Abstract.** In the paper we have analyzed the behavior of isotherms families of Reissner – Nordström (RN) and Born – Infeld (BI) black holes in anti-de Sitter space (AdS) using thermodynamic equations of state (EOS) of the form  $P = P(T, r_+)$ , parameterized by the event horizon  $r_+$ . It is shown that unlike RN-AdS black holes, the isotherm family of BI-AdS black holes contains two critical isotherms: one with “a van der Waals” (vdW) origin and the other with “a non-van der Waals” (nvdW) origin.

**Keywords:** equation of state, isotherms family, critical isotherm, anti-de Sitter space, Reissner – Nordström black hole, Born – Infeld black hole.

**For citation:** Novikava, V. U. On the specifics of the isotherms family of Born – Infeld AdS black holes / V. U. Novikava, G. Yu. Tyumenkov // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 2 (67). – P. 35–39. – DOI: [https://doi.org/10.54341/20778708\\_2026\\_2\\_67\\_35](https://doi.org/10.54341/20778708_2026_2_67_35) (in Russian). – EDN: UXVKOL

### Введение

Термодинамические исследования чёрных дыр (ЧД) начались с работ Бекенштейна [1], Хокинга и Пэйджа [2]. Предположение о наличии у ЧД электрического заряда [3] привело к обнаружению схожести фазовых диаграмм ЧД и ван-дер-ваальсовской жидкости. Что, в свою очередь, позволило сделать предположение о возможной схожести термодинамического поведения и по другим параметрам. Заметный вклад в понимание термодинамики и механики чёрных дыр был сделан в статье [4], а подробный сравнительный анализ их поведения при джоуль-томсоновском расширении с поведением ван-дер-ваальсовской жидкости сделан в работах [5]-[7] и с поведением жидкости Редлиха – Квонга в статье [8].

В данной работе будет показана специфика поведения семейства изотерм БИ-АдС чёрной дыры, заключающаяся в присутствии в нём двух критических изотерм с различным характером формирования.

При этом мы будем использовать общепринятые для данной области теоретической физики значения фундаментальных констант

$$G_N = \hbar = k_B = c = 1.$$

В начале проиллюстрируем ван-дер-ваальсовский тип семейства изотерм на примере РН-АдС чёрных дыр в двух различных физических ситуациях: изолированность и погружение в тёмную материю.

### 1 ЧД с семействами изотерм ван-дер-ваальсовского типа

Обратимся к статичной заряженной или РН-АдС чёрной дыре, геометрия пространства-времени которой определяется метрикой [5]

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f^{-1}(r)dr^2 + r^2d\Omega^2,$$

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} + \frac{r^2}{l^2}, \quad (1.1)$$

где  $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2$ , а  $l$ ,  $M$  и  $Q$  – анти-де ситтеровский радиус, масса и заряд чёрной дыры. Радиус горизонта событий  $r_+$  находится, как наибольший корень уравнения  $f(r_+) = 0$ . Масса чёрной дыры  $M$  отождествляется с энтальпией  $H$  и

$$M = H = \frac{r_+}{2} \left( 1 + \frac{Q^2}{r_+^2} + \frac{r_+^2}{l^2} \right). \quad (1.2)$$

Тогда выражения (1.1) и (1.2) приводят к уравнению состояния (УС) вида  $P = P(r_+, T; Q)$  при стандартной связи с объёмом  $V$ :

$$P = \frac{T}{2r_+} - \frac{1}{8\pi r_+^2} + \frac{Q^2}{8\pi r_+^4}, \quad r_+ = \left( \frac{3V}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (1.3)$$

Математическим определением критической точки, как точки перегиба изотермы и точки схождения экстремумов, является одновременное выполнение двойного условия

$$\frac{\partial P}{\partial r_+} = 0, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial r_+^2} = 0, \quad (1.4)$$

приводящего к критическим параметрам

$$T_C = \frac{\sqrt{6}}{18\pi Q}, \quad r_{+C} = \sqrt{6}Q, \quad P_C = \frac{1}{96\pi Q^2}. \quad (1.5)$$

Например, при  $Q = 2$  они имеют следующие значения  $T_C = 0,02166$ ;  $P_C = 8,29 \cdot 10^{-4}$ ;  $r_{+C} = 4,89$ .

На основании УС (1.3) и условий (1.5) получаем семейство изотерм, представленное на рисунке 1.1.

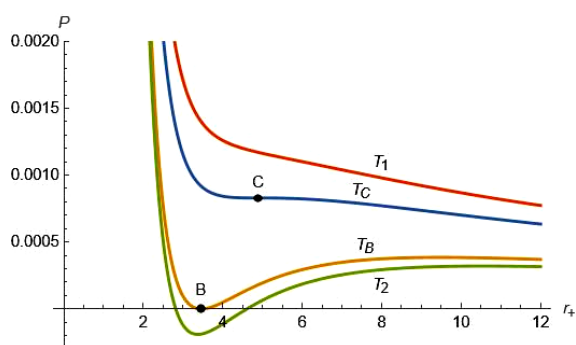


Рисунок 1.1 – Изотермы РН-АдС ЧД в случае  $Q = 2$ :  $T_1 = 0,02500$ ;  $T_C = 0,02166$  (критическая);  $T_B = 0,01531$  (бойлевская);  $T_2 = 0,01400$

Видно, что поведение представленных на рисунке 1.1 изотерм, среди которых критическая, бойлевская и даже содержащая область отрицательных давлений, качественно повторяют поведение аналогичных изотерм жидкостей, описываемых не только УС Ван-дер-Ваальса, но и УС Дитеричи-II, УС Берто и УС Редлиха – Квонга,

а также ряда УС с температурной параметризацией, например, УС Пенга – Робинсона и УС Соаве – Редлиха – Квонга.

Для изотерм, помимо указанных специальных точек С и В, характерно наличие физических горизонтальной и вертикальной асимптот

$$P(r_+, T; Q, \lambda) \Big|_{r_+ \rightarrow 0} \rightarrow +\infty, \quad P(r_+, T; Q, \lambda) \Big|_{r_+ \rightarrow \infty} \rightarrow +0, \quad (1.6)$$

На изотермах ниже критической присутствуют нефизические участки, на которых  $(\partial P / \partial r_+)_T > 0$ , а также очевидно положение изотермы-изобары фазового перехода, следующее из правила Максвелла. Вполне допускается возможность присутствия метастабильных состояний.

Далее усложним ситуацию и поместим РН-АдС чёрную дыру в тёмную материю, обладающую свойствами идеальной жидкости (ИЖТМ), характеризуемой обобщённой координатой  $\lambda > 0$  [6].

Это приводит к изменениям в (1.1) и теперь

$$f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} - \frac{\Lambda}{3}r^2 + \frac{\lambda}{r} \ln\left(\frac{r}{\lambda}\right). \quad (1.7)$$

Обобщённой координате  $\lambda$  соответствует обобщённая сила  $A$ , определяемая как

$$A = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{r}{\lambda}\right). \quad (1.8)$$

В рассматриваемом случае формулы (1.7) и (1.8) на горизонте событий дают выражение для массы

$$M = \frac{r_+}{2} + \frac{4}{3} \pi P r_+^3 + \frac{Q^2}{2r_+} + \frac{1}{2} \lambda \ln\left(\frac{r_+}{\lambda}\right), \quad (1.9)$$

дифференциал которой теперь имеет вид

$$dM = dH = TdS + VdP + \Phi dQ + Ad\lambda. \quad (1.10)$$

Используя (1.9) и (1.10), можно получить температуру  $T$  и уравнение состояния  $P = P(r_+, T)$  при той же связи с объёмом

$$T = \frac{\lambda}{4\pi r_+^2} + 2Pr_+ + \frac{1}{4\pi r_+} - \frac{Q^2}{4\pi r_+^3},$$

$$P(r_+, T) = \frac{T}{2r_+} - \frac{1}{8\pi r_+^2} + \frac{Q^2}{8\pi r_+^4} - \frac{\lambda}{8\pi r_+^3}. \quad (1.11)$$

Применение условия для критических параметров (1.4) в (1.11) приводит к их значениям

$$r_{+C} = \frac{1}{2} \sqrt{9\lambda^2 + 24Q^2} - \frac{3\lambda}{2}; \quad (1.12)$$

$$T_C = \frac{16Q^2 - 3\lambda(\sqrt{9\lambda^2 + 24Q^2} - 3\lambda)}{\pi(\sqrt{9\lambda^2 + 24Q^2} - 3\lambda)^3}; \quad (1.13)$$

$$P_C = \frac{\lambda(3\lambda - \sqrt{9\lambda^2 + 24Q^2}) + 6Q^2}{\pi(\sqrt{9\lambda^2 + 24Q^2} - 3\lambda)^4}. \quad (1.14)$$

УС (1.11) и выражения для критических параметров (1.12)–(1.14) в случае  $Q = 1$  и  $\lambda = 0,5$  приводят к изотермам, изображенным на рисунке 1.2.

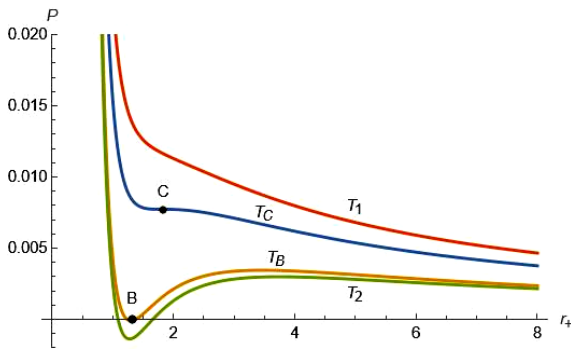


Рисунок 1.2 – Изотермы РН-АдС ЧД в ИЖТМ при  $Q = 1$  и  $\lambda = 0,5$ :  $T_1 = 0,08500$ ;  $T_C = 0,07071$  (критическая);  $T_B = 0,04850$  (бойлевская);  $T_2 = 0,04500$

При этом критическое давление  $P_C = 7,73 \cdot 10^{-3}$  и критический горизонт событий  $r_{+C} = 1,83$ . Схожесть поведения изотерм с предыдущим случаем очевидна, включая наличие асимптот (1.6). Поведение остаётся ван-дер-ваальсовским и не требует дополнительного комментария.

## 2 Семейство изотерм БИ-АдС чёрной дыры

Рассмотрим БИ-АдС ЧД, возникающую как решение уравнения Эйнштейна для случая нелинейной электродинамики при условии устранения сингулярности электромагнитного поля в центре дыры путем использования фундаментальной длины  $\beta$ , накладывающей ограничение на напряженность поля.

Космологическая константа  $\Lambda$ , сохраняя характерную для АдС-пространства связь с давлением  $P$ , теперь связана с его размерностью  $D$

$$P = -\frac{\Lambda}{8\pi} = \frac{(D-1)(D-2)}{16\pi l^2}. \quad (2.1)$$

Метрика приобретает вид

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2 d\Omega_{D-2}^2 \quad (2.2)$$

с квадратом дифференциала телесного угла

$d\Omega_{D-2}^2$  и включает в себя значительно усложнившуюся  $f(r)$  [7], также зависящую от  $D$

$$f(r) = 1 - \frac{m}{r^{D-3}} + \frac{r^2}{l^2} + \frac{4\beta^2 r^2}{(D-1)(D-2)} \times \left( 1 - \sqrt{1 + \frac{(D-2)(D-3)q^2}{2\beta^2 r^{2D-4}}} \right) + \frac{2(D-2)q^2}{(D-1)r^{2D-6}} \times {}_2F_1 \left[ \frac{D-3}{2D-4}, \frac{1}{2}, \frac{3D-7}{2D-4}, -\frac{(D-2)(D-3)q^2}{2\beta^2 r^{2D-4}} \right], \quad (2.3)$$

где  ${}_2F_1(a, b; c; z)$  – гипергеометрическая функция. Дополнительно в (2.3) введены две новые переменные, связанные с массой и зарядом

$$M = \frac{(D-2)\Omega_{D-2}}{16\pi} m; \quad (2.4)$$

$$Q = \sqrt{2(D-2)(D-3)} \frac{\Omega_{D-2}}{8\pi} q. \quad (2.5)$$

Тогда на горизонте событий из (2.3)–(2.5) масса задаётся выражением

$$M = \frac{(D-2)\Omega_{D-2}}{16\pi} r_+^{D-3} \left\{ 1 + \frac{r_+^2}{l^2} + \frac{4\beta^2 r_+^2}{(D-1)(D-2)} (1 - \sqrt{1 - z_+}) + \frac{2(D-2)q^2}{(D-1)r_+^{2D-6}} {}_2F_1(a, b; c; z_+) \right\}, \quad (2.6)$$

а связь объёма с горизонтом событий имеет вид

$$V = \frac{\Omega_{D-2}}{D-1} r_+^{D-1}.$$

На основе (2.6) при учёте (2.3)–(2.5) получаем выражение для температуры и уравнение состояния  $P(r_+, T)$ :

$$T = \frac{1}{4\pi} \left[ \frac{(D-1)r_+}{l^2} + \frac{D-3}{r_+} + \frac{4\beta^2 r_+}{(D-2)} (1 - \sqrt{1 - z_+}) \right],$$

$$P(r_+, T) = \frac{D-2}{4r_+} \left\{ T - \frac{D-3}{4\pi r_+} - \frac{\beta^2 r_+}{\pi(D-2)} (1 - \sqrt{1 - z_+}) \right\}, \quad (2.7)$$

в которых мы используем параметр

$$z_+ = -\frac{(D-2)(D-3)q^2}{2\beta^2 r_+^{2D-4}}, \quad (2.8)$$

следующий из (2.3) для горизонта событий.

Далее, применяем условие (1.4) к (2.7) с учётом (2.8). Для расчётов и визуализации результатов используем пакет Wolfram Mathematica в частном физически оправданном случае  $D = 4$ , для которого выполняется  $Q = q$ , фиксируя фундаментальную длину на уровне  $\beta = 10$ , что опирается на данные работы [7]. И получаем кривые семейства изотерм для рассматриваемого случая (рисунок 2.1).

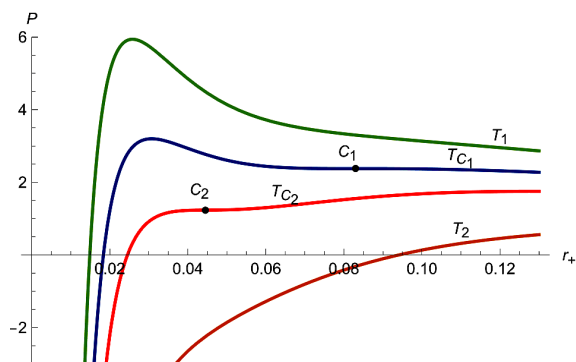


Рисунок 2.1 – Изотермы БИ-АдС ЧД при  $D = 4$ ,  $\beta = 10$ ,  $Q = q = 0,04$ :  $T_1 = 1,30$ ;  $T_{C1} = 1,14662$  (вдВ критическая);  $T_{C2} = 1,01$  (нвдВ критическая); с  $T_2 = 0,70$

Очевидно наличие двух критических точек  $C_1$  и  $C_2$  на изотермах с указанными температурами, которым соответствуют следующие критические давления и критические горизонты событий:  $P_{C1} = 2,38$ ;  $r_{+C1} = 0,083$ ;  $P_{C2} = 1,23$ ;  $r_{+C2} = 0,044$ .

Также заметно, что у изотерм БИ-АдС ЧД присутствует нефизическая асимптотика вблизи нуля горизонта событий, противоположная асимптотике изотерм РН-АдС ЧД, то есть

$$P(r_+, T; Q, \lambda) \Big|_{r_+ \rightarrow 0} \rightarrow -\infty.$$

«Ван-дер-ваальсовское» происхождение изотермы с критической точкой  $C_1$  легко подтвердить фактом сближения локальных экстремумов с ростом температуры и наличием нефизической области изотермы с  $(\partial P / \partial r_+)_T > 0$  между ними, что явно показано на рисунке 2.2.

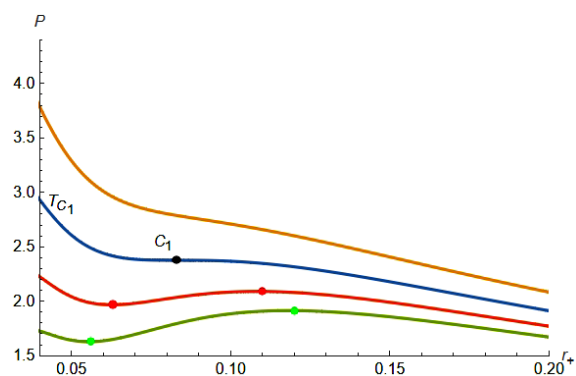


Рисунок 2.2 – Изотермы БИ-АдС ЧД при  $D = 4$ ,  $\beta = 10$ ,  $Q = q = 0,04$ : экстремумы сходятся к точке  $C_1$  с ростом температуры

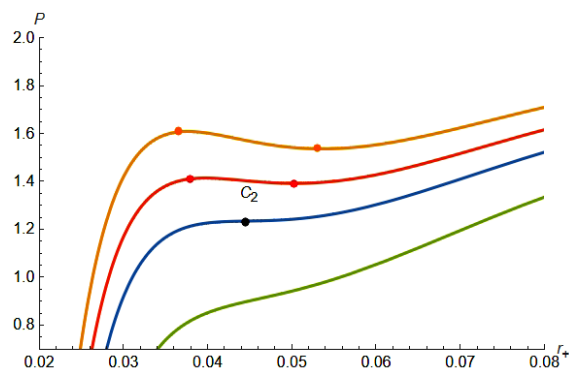


Рисунок 2.3 – Изотермы БИ-АдС ЧД при  $D = 4$ ,  $\beta = 10$ ,  $Q = q = 0,04$ : экстремумы сходятся к точке  $C_2$  с понижением температуры

«Неван-дер-ваальсовское» происхождение изотермы с критической точкой  $C_2$  также очевидно: сближение локальных экстремумов происходит с понижением температуры, и только участки изотерм между ними являются физическими с  $(\partial P / \partial r_+)_T < 0$ , что продемонстрировано на рисунке 2.3. Возможность реализации фазового перехода или же метастабильных состояний отсутствует.

### Заключение

Таким образом, в данной работе на примере чёрных дыр видов РН-АдС и РН-АдС в ИЖТМ показаны действительно «ван-дер-ваальсовские»: поведение изотерм с возможностью фазового перехода и наличия метастабильных состояний, характер формирования критической точки путем схождения экстремумом при росте температуры и физически корректное асимптотическое поведение.

На этом фоне продемонстрирована специфика семейства изотерм БИ-АдС чёрных дыр, связанная с наличием в нём двух критических изотерм «ван-дер-ваальсовского» и «неван-дер-ваальсовского» происхождения и поведения. Во втором случае отсутствует возможность фазового перехода, не возникают метастабильные состояния, формирование критической точки идёт путем схождения экстремумом при понижении температуры. Для всего семейства изотерм возникает физически некорректное асимптотическое поведение вблизи нуля горизонта событий.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Bekenstein, J. D. Black Holes and the Second Law / J. D. Bekenstein // Lett. Nuovo Cimento. – 1972. – Vol. 4. – P. 737–740.
2. Hawking, S. W. Thermodynamics of Black Holes in Anti-de Sitter Space / S. W. Hawking, D. N. Page // Commun. Math. Phys. – 1983. – Vol. 87. – P. 577–588.

---

3. Chamblin, A. Charged AdS Black Holes and Catastrophic Holography / A. Chamblin, R. Emparan, C. V. Johnson, R. C. Myers // Phys. Rev. D. – 1999. – Vol. 60. – P. 064018.

4. Kastor, D. Enthalpy and the Mechanics of AdS Black Holes / D. Kastor, S. Ray, J. Traschen // Class. Quantum Gravity. – 2009. – Vol. 26. – P. 195011.

5. Ökcü, Ö. Joule – Thomson Expansion of the Charged AdS Black Holes / Ö. Ökcü, E. Aydiner // Eur. Phys. J. C. – 2017. – Vol. 77. – Art. № 24.

6. Joule – Thomson Expansion of RN-AdS Black Holes Immersed in Perfect Fluid Dark Matter / Y. Cao, H. Feng, W. Hong, J. Tao // Commun. Theor. Phys. – 2021. – Vol. 73. – P. 095403.

7. Joule-Thomson Expansion of Born-Infeld AdS Black Holes / S. Bi, M. Du, J. Tao, F. Yao // Chin. Phys. C. – 2021. – Vol. 45. – № 2. – P. 025109.

8. Новикова, О. В. Джоуль-томсоновское расширение: жидкость Редлиха – Квонга и заряженная АдС чёрная дыра / О. В. Новикова, Г. Ю. Тюменков // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 2 (63). – С. 30–34.

Поступила в редакцию 04.03.2026.

---

**Информация об авторах**

Новикова Ольга Владимировна – магистр ф.-м.н.  
Тюменков Геннадий Юрьевич – к.ф.-м.н., доцент