

УДК 519.3:62-50+530.12:531.51

ФИЗИКА

В. Я. КРЕЙНОВИЧ

К ВОПРОСУ О ВЫВОДЕ ГУПТОЙ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА

(Представлено академиком А. Д. Александровым 12 XII 1974)

В работах ^(1, 2) С. Гупта предложил вывод уравнений Эйнштейна, основанный на трактовке поля гравитации как поля частиц спина 2 в плоском пространстве, взаимодействующего, в частности, с самим собой. Этот вывод используется в литературе (см., например, ⁽³⁾) как довод в пользу такой трактовки. Цель настоящей заметки — показать, что уже в третьем (по c^{-2}) приближении рассуждения Гупты не ведут к уравнениям ОТО, и, значит, речь идет лишь о выводе постньютоновского приближения теории.

Напомним идею вывода. Уравнения для поля частиц спина 2 имеют, как известно, вид $\square u_{ij}$ = поле источников. В качестве источника гравитационного поля выступает полный тензор энергии-импульса, включающий как одно из слагаемых и тензор энергии-импульса самого гравитационного поля. В частности, в отсутствие прочих полей искомый лагранжиан L для гравитационного поля (предполагается, что он зависит не более чем от первых производных u_{ij}) должен обладать свойством

(Г) Из вариационных уравнений

$$\frac{\delta L}{\delta u_{ij}} = 0 \quad (1)$$

следует, что

$$\square u_{ij} = T_{ij}(L), \quad (2)$$

где $T_{ij}(L)$ — симметризованный тензор энергии-импульса, который получается из канонического с помощью стандартной процедуры, $u_{,j}^{ij} = 0$ и $\square$ — лоренц-ковариантный даламбертиан. Известно ⁽⁴⁾, что если положить

$$u^{ij} = g^{ij} \sqrt{-g} - \eta^{ij}, \quad \eta^{ij} = \text{diag}\{1, -1, -1, -1\},$$

то условие (Г) выполнится для лагранжиана, отличающегося от эйнштейновского на полную дивергенцию. Предложение, которое делает сам Гупта для того, чтобы выбрать единственную теорию из числа удовлетворяющих (Г), таково: уравнения (2) не просто следуют из (1), но даже справедливо

$$\frac{\delta L}{\delta u_{ij}} = -\square u_{ij} + T_{ij}(L). \quad (3)$$

Если разложить L в ряд и по u_{ij} и $u_{ij,k}$, т. е. представить в виде суммы

$$L = \sum_{n \geq 2} L_n,$$

где L_n содержит u_{ij} и $u_{ij,k}$ в n -й степени, подставить это разложение в (3) и приравнять члены одинаковой степени, то мы получим, что

$$\frac{\delta L_2}{\delta u_{ij}} = -\square u_{ij},$$

$$\frac{\delta L_{n+1}}{\delta u_{ij}} = T_{ij}(L_n) \quad (4)$$

при $n \geq 2$, откуда можно, как считает Гупта, последовательно определить все L_n . Сам Гупта вычисляет $L_2 = 1/2 u_{ij, k} u^{ij, k}$, откуда

$$t_{ik}^2 = T_{ik}(L_2) = u_{lm, i} u_{, k}^{lm} - 1/2 \eta_{ik} (u_{lm, n} u^{lm, n}). \quad (5)$$

Покажем, что уравнение (4) при $n=2$ уже неразрешимо и, значит, упрощающее предположение (3) невозможно; рассуждения Гупты в общем случае не проходят.

Лемма 1. Если a и b — произвольные поля, то

$$\frac{\delta}{\delta a} \left(\frac{\partial L}{\partial b} \right) = \frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{\delta L}{\delta a} \right).$$

Если бы нашлся L такой, что

$$t_{ik}^2 = \frac{\delta L}{\delta u_{ik}} = \frac{\partial L}{\partial u_{ik}} + \text{div},$$

где div означает полную дивергенцию, то в силу $\delta(\text{div})=0$ и леммы мы получаем, что

$$\frac{\delta t_{ik}^2}{\delta u_{lm}} = \frac{\delta}{\delta u_{lm}} \left(\frac{\partial L}{\partial u_{ik}} \right) = \frac{\partial}{\partial u_{ik}} \left(\frac{\delta L}{\delta u_{lm}} \right) = \frac{\partial t_{lm}^2}{\partial u_{ik}}.$$

Нетрудно проверить, что для (5) левая и правая части равенства различны. Докажем некоторое чуть более сильное утверждение. Могло бы быть так, что уравнения, которые получаются при варьировании $L_2 + L_3$, совпадают с $\square u_{ij} = T_{ij}(L) + \theta_{ij} + o(u^2)$, где θ_{ij} обращается в 0 в силу калибровочного условия $u_{,j}^{ij} = 0$. Значит, один из сомножителей в каждом из слагаемых, образующих θ_{ij} , совпадает с $u_{,k}^{ik}$, откуда, учитывая, что θ_{ij} симметрично и содержит u_{ki} и его производные квадратично, получаем, что

$$\theta_{ij} = p \eta_{ij} u_{lm, n} u_{, n}^{lm} + q u_{lm, n} u_{, jn}^{lm},$$

откуда $\delta \theta_{ij} = 0$ в силу условия калибровки, и наше доказательство проходит без изменений. Отметим, что лемма следует из

$$\begin{aligned} \frac{\delta M}{\delta a} &= \frac{\partial M}{\partial a} - \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial M}{\partial a_{, i}} = \\ &= \frac{\partial M}{\partial a} - \sum_c \frac{\partial^2 M}{\partial c \partial a_{, i}} c_{, i} - \sum_{c, k} \frac{\partial^2 M}{\partial c_{, k} \partial a_{, i}} c_{, ki} \end{aligned}$$

с использованием

$$\frac{\partial c_{, i}}{\partial a} = \frac{\partial c_{, ik}}{\partial a} = 0.$$

Кимура (⁵, ⁶) не оспаривая вывода Гупты, предложил его модификацию: гравитационное поле описывается тензорным u_{ij} и скалярным u полями, которые связаны соотношением $u = u_i^i$ (это соотношение не учитывается при варьировании). Взаимодействие этих полей с гравитацией описывается уравнениями $\square u_{ij} = T_{ij}$ и $\square u = 1/2 T$, и для вакуумного лагранжиана L справедливы уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta u_{ij}} &= -\square u_{ij} + T_{ij}(L), \\ \frac{\delta L}{\delta u} &= -1/2 (-\square u + T(L)). \end{aligned}$$

Рассуждения, аналогичные приведенным выше, показывают, что и эти уравнения неразрешимы в третьем по u_{ij} , u и их производным приближении, причем, как и там, ограничение $u_{,j}^{,i}=0$ не влияет на результат.

Автор благодарен А. А. Грибу и Ю. Б. Румеру за ценные обсуждения и внимание к работе.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
9 XII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ *S. N. Gupta*, Phys. Rev., v. 96, 1683 (1954). ² *S. N. Gupta*, Rev. Modern Phys., v. 29, 334 (1957). ³ *Н. В. Муцкевич*, Физические поля в общей теории относительности, М., 1969. ⁴ *A. Papapetrou*, Proc. Roy. Irish Acad., A, v. 52, 11 (1948).
⁵ *T. Kimura*, Progr. Theoret. Phys., v. 16, 157 (1956). ⁶ *T. Kimura*, *ibid.*, p. 555.