

МИНИМАЛЬНЫЕ τ -ЗАМКНУТЫЕ σ -ЛОКАЛЬНЫЕ НЕ МЕТА- σ -НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ФОРМАЦИИ

В. В. Скрундзь

Белорусский государственный университет, Минск

MINIMAL τ -CLOSED σ -LOCAL NON-META- σ -NILPOTENT FORMATIONS

V. V. Skrundz

Belarusian State University, Minsk

Аннотация. Пусть $\mathfrak{F}$ – τ -замкнутая σ -локальная формация конечных групп, где σ – некоторое разбиение множества всех простых чисел, τ – подгрупповой функтор в смысле А. Н. Скибы. Формацию $\mathfrak{F}$ называют минимальной τ -замкнутой σ -локальной не $\mathfrak{H}$ -формацией или $\mathfrak{H}_\sigma^*$ -критической формацией, если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все собственные τ -замкнутые σ -локальные подформации из $\mathfrak{F}$ содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$. В случае, когда $\mathfrak{H}$ – формация всех мета- σ -нильпотентных групп, формацию $\mathfrak{F}$ называют минимальной τ -замкнутой σ -локальной не мета- σ -нильпотентной формацией. В работе получено описание минимальных τ -замкнутых σ -локальных не мета- σ -нильпотентных формаций конечных групп.

Ключевые слова: конечная группа, мета- σ -нильпотентная группа, формационная σ -функция, σ -локальная формация, подгрупповой функтор, критическая σ -локальная формация.

Для цитирования: Скрундзь, В. В. Минимальные τ -замкнутые σ -локальные не мета- σ -нильпотентные формации / В. В. Скрундзь // Проблемы физики, математики и техники. – 2026. – № 2 (67). – С. 72–78. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_2_67_72. – EDN: OWIQJS

Abstract. Let $\mathfrak{F}$ be a τ -closed σ -local formation of finite groups, where σ is some partition of the set of all prime numbers, τ is a subgroup functor in the sense of A. N. Skiba. A formation $\mathfrak{F}$ is called a minimal τ -closed σ -local non- $\mathfrak{H}$ -formation or a $\mathfrak{H}_\sigma^*$ -critical formation if $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, but all proper τ -closed σ -local subformations of $\mathfrak{F}$ are contained in the class of groups $\mathfrak{H}$. In the case when $\mathfrak{H}$ is the formation of all meta- σ -nilpotent groups, the formation $\mathfrak{F}$ is called a minimal τ -closed σ -local non-meta- σ -nilpotent formation. In this paper, we obtain a description of minimal τ -closed σ -local non-meta- σ -nilpotent formations of finite groups.

Keywords: finite group, meta- σ -nilpotent group, formation σ -function, σ -local formation, subgroup functor, critical σ -local formation.

For citation: Skrundz, V. V. Minimal τ -closed σ -local non-meta- σ -nilpotent formations / V. V. Skrundz // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2026. – № 2 (67). – P. 72–78. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2026_2_67_72 (in Russian). – EDN: OWIQJS

Введение

Задача изучения критических формаций была поставлена Л. А. Шеметковым [1] на VI Всесоюзном симпозиуме по теории групп. Развивая результаты А. Н. Скибы о критических локальных [2]–[6] и критических τ -замкнутых локальных формациях [7, гл. 2], а также результаты И. Н. Сафоновой [8], [9] о критических σ -локальных формациях, автором и И. Н. Сафоновой [10]–[13] изучались минимальные τ -замкнутые σ -локальные не $\mathfrak{H}$ -формации, где τ – подгрупповой функтор в смысле А. Н. Скибы [7], $\mathfrak{H}$ – некоторая σ -локальная формация. Основным результатом исследований в этом направлении является описание $\mathfrak{H}_\sigma^*$ -критических формаций

[11], где $\mathfrak{H}$ – некоторая σ -локальная формация классического типа (т. е. такая σ -локальная формация, у которой имеется σ -локальное определение все неабелевы значения которого σ -локальны).

Теорема А [11, теорема]. Пусть $\mathfrak{H}$ – σ -локальная формация классического типа и h – ее каноническое σ -локальное определение. Тогда $\mathfrak{F}$ в том и только в том случае является минимальной τ -замкнутой σ -локальной не $\mathfrak{H}$ -формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma^* \text{form} G$, где G – такая монолитическая $\bar{\tau}$ -минимальная не $\mathfrak{H}$ -группа с монолитом $P = G^\mathfrak{H}$, что выполняется одно из следующих условий:

1) $G = P$ – такая простая σ_i -группа, что $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{H})$ и $\tau(G) \subseteq \{1, G\}$;

2) P – не σ -примарная группа и G – τ -минимальная не $h(\sigma_i)$ -группа с $P = G^{h(\sigma_i)}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(P)$;

3) $G = P \rtimes K$, где $P = C_G(P)$ – p -группа, $p \in \sigma_i$, а K – либо монолитическая τ -минимальная не $h(\sigma_i)$ -группа с монолитом

$$Q = K^{h(\sigma_i)} \not\subseteq \Phi(K),$$

где $\sigma_i \in \sigma(Q)$, либо минимальная не $h(\sigma_i)$ -группа одного из следующих типов: а) группа кватернионов порядка 8, если $2 \notin \sigma_i$; б) экстраспециальная группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты $q \notin \sigma_i$; в) циклическая q -группа, $q \notin \sigma_i$.

Кроме того, в работах [12], [13] нами изучался вопрос существования минимальных τ -замкнутых σ -локальных не $\mathfrak{H}$ -подформаций, у всякой τ -замкнутой σ -локальной формации $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{H}$ – некоторая σ -локальная формация классического типа. В этом направлении получен следующий результат.

Теорема В [13, теорема В]. Пусть $\mathfrak{F}$ – τ -замкнутая σ -локальная формация, $\mathfrak{H}$ – произвольная σ -локальная формация классического типа. Тогда если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, то в $\mathfrak{F}$ имеется по меньшей мере одна минимальная τ -замкнутая σ -локальная не $\mathfrak{H}$ -подформация.

В данной заметке, продолжая изучение минимальных τ -замкнутых σ -локальных не $\mathfrak{H}$ -формаций, мы даем описание τ -замкнутых σ -локальных не мета- σ -нильпотентных формаций конечных групп. Напомним, что группа называется мета- σ -нильпотентной, если она является расширением σ -нильпотентной группы с помощью σ -нильпотентной группы. Класс всех мета- σ -нильпотентных групп совпадает с произведением $\mathfrak{N}_\sigma \mathfrak{N}_\sigma$ и является σ -локальной формацией, его обозначают через $\mathfrak{N}_\sigma^2 = \mathfrak{N}_\sigma \mathfrak{N}_\sigma$.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема С. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной τ -замкнутой σ -локальной не мета- σ -нильпотентной формацией, когда $\mathfrak{F} = l_\sigma^* \text{form} G$, где G – такая монолитическая τ -минимальная не мета- σ -нильпотентная группа с монолитом P , что выполняется одно из следующих условий:

(1) $P = G^{\mathfrak{N}_\sigma}$ – не σ -примарная группа и G – τ -минимальная не σ -нильпотентная группа;

(2) $G = P \rtimes T$, где $P = C_G(P)$ – p -группа, $p \in \sigma_i$, а T – такая монолитическая τ -минимальная не $(\mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{N}_\sigma)$ -группа с монолитом Q , что $Q = T^{\mathfrak{E}_{\sigma_i} \mathfrak{N}_\sigma} = \sigma_j$ -группа, $j \neq i$ и $T / O_{\sigma_j}(Q)$ – неединичная σ -нильпотентная группа.

Мы доказываем теорему С в разделе 3, а также рассматриваем некоторые следствия данного результата.

1 Обозначения и определения

В работе используются обозначения, принятые в книгах [7], [14]. Основные определения и обозначения теории σ -свойств групп и τ -замкнутых σ -локальных формаций представлены в работах [15]–[22]. Напомним некоторые из них.

Пусть $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$ – некоторое разбиение множества всех простых чисел $\mathbb{P}$, G – группа, $\mathfrak{F}$ – класс групп,

$$\sigma(G) = \{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(G) \neq \emptyset\}, \quad \sigma(\mathfrak{F}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{F}} \sigma(G).$$

Группу G называют [17, с. 2]: σ -примарной, если G является σ_i -группой для некоторого $i \in I$; σ -нильпотентной, если G – прямое произведение σ -примарных групп; мета- σ -нильпотентной, если в G имеется такая нормальная σ -нильпотентная подгруппа N , что факторгруппа G/N σ -нильпотентна; σ -разрешимой, если каждый главный фактор группы G σ -примарен.

Класс всех σ -разрешимых групп обозначают через $\mathfrak{S}_\sigma$, через $\mathfrak{N}_\sigma$ и $\mathfrak{N}_\sigma^2$ обозначают классы всех σ -нильпотентных и мета- σ -нильпотентных групп соответственно.

Функцию f вида

$$f : \sigma \rightarrow \{\text{формации групп}\}$$

называют [18] *формационной σ -функцией*. Для всякой формационной σ -функции f класс $LF_\sigma(f)$ определяется следующим образом:

$$LF_\sigma(f) = \{G \mid G = 1 \text{ или } G \neq 1 \text{ и } G / O_{\sigma_i \setminus \sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma(G)\}.$$

Если для некоторой формационной σ -функции f имеет место $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, то говорят, что формация $\mathfrak{F}$ является σ -локальной [18], а f является σ -локальным определением $\mathfrak{F}$.

Пусть каждой группе G сопоставлена некоторая система ее подгрупп $\tau(G)$. Тогда τ называют *подгрупповым функтором* в смысле А. Н. Скибы [7, с. 16], если выполняются следующие условия:

(1) $G \in \tau(G)$ для каждой группы G ;

(2) для любого эпиморфизма $\varphi: A \rightarrow B$ и для любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место $H^\varphi \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Подгрупповой функтор τ называют [7, с. 16]: *замкнутым*, если для любых двух групп G и $H \in \tau(G)$ имеет место $\tau(H) \subseteq \tau(G)$; *тривиальным*, если $\tau(G) = \{G\}$ для любой группы G ; *единичным*, если $\tau(G) = s(G)$ множество всех подгрупп группы G .

Напомним также [7, с. 17], что через s_n обозначают подгрупповой функтор, выделяющий в каждой группе G множество $s_n(G)$ всех нормальных подгрупп группы G .

Подгруппу $A \in \tau(G)$ называют τ -подгруппой группы G .

На множестве всех подгрупповых функторов частичный порядок $\leq$ вводят [7, с. 19] полагая, что $\tau_1 \leq \tau_2$, если $\tau_1(G) \subseteq \tau_2(G)$ для любой группы G .

Для любой совокупности подгрупповых функторов $\{\tau_j \mid j \in J\}$ определяют их пересечение $\tau = \bigcap_{j \in J} \tau_j$ следующим образом: $\tau(G) = \bigcap_{j \in J} \tau_j(G)$ для любых групп G . Если τ – произвольный подгрупповой функтор, то $\bar{\tau}$ – пересечение всех замкнутых подгрупповых функторов τ_i , для которых $\tau \leq \tau_i$, называют [7, с. 20] *замыканием функтора* τ .

Пусть τ – подгрупповой функтор. Формация $\mathfrak{F}$ называется τ -замкнутой [7, с. 23], если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $G \in \mathfrak{F}$. В частности, формация $\mathfrak{F}$ называется: *наследственной*, если она s -замкнута; *нормально наследственной*, если она s_n -замкнута.

Совокупность всех τ -замкнутых σ -локальных формаций обозначают через I_σ^τ . Формации из I_σ^τ называют I_σ^τ -формациями. Для любого набора групп $\mathfrak{X}$ символ $I_\sigma^\tau \text{form} \mathfrak{X}$ обозначает I_σ^τ -формацию порожденную $\mathfrak{X}$, т. е. пересечение всех τ -замкнутых σ -локальных формаций, содержащих $\mathfrak{X}$. Если $\mathfrak{X} = \{G\}$ для некоторой группы G , то $I_\sigma^\tau \text{form} G$ называют *однопорожденной* τ -замкнутой σ -локальной формацией. Напомним также, что в классическом случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$, однопорожденную τ -замкнутую локальную формацию, порожденную группой G , обозначают через $\tau^1 \text{form} G$, а τ -замкнутую формацию, порожденную набором групп $\mathfrak{X}$, обозначают символом $\tau \text{form} \mathfrak{X}$.

Если f – формационная σ -функция, то символом $\text{Supp}(f)$ обозначают *носитель* f , т. е. множество всех σ_i таких, что $f(\sigma_i) \neq \emptyset$.

Формационную σ -функцию f называют: τ -значной, если $f(\sigma_i)$ – τ -замкнутая σ -локальная формация для каждого $\sigma_i \in \text{Supp}(f)$; *внутренней*, если $f(\sigma_i) \subseteq LF_\sigma(f)$ для всех i ; *полной*, если $f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)$ для всех i .

Если f – полная внутренняя формационная σ -функция и $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$, то f называют *каноническим σ -локальным определением формации* $\mathfrak{F}$.

Пусть $\{f_j \mid j \in J\}$ – некоторый набор τ -значных формационных σ -функций. Мы используем символ $\bigcap_{j \in J} f_j$ для обозначения такой формационной σ -функции h , что $h(\sigma_i) = \bigcap_{j \in J} f_j(\sigma_i)$, в частности,

$$h(\sigma_i) = (f_1 \cap f_2)(\sigma_i) = f_1(\sigma_i) \cap f_2(\sigma_i),$$

для всех i .

Пусть $\{f_j \mid j \in J\}$ множество всех τ -значных σ -локальных определений формации $\mathfrak{F}$. Тогда $f = \bigcap_{j \in J} f_j$ называют *наименьшим τ -значным σ -локальным определением* $\mathfrak{F}$.

Для произвольного набора групп $\mathfrak{X}$ и любого $\sigma_i \in \sigma$ символом $\mathfrak{X}(\sigma_i)$ [19, с. 962] обозначают класс групп, определенный следующим образом:

$$\mathfrak{X}(\sigma_i) = (G / O_{\sigma_i, \sigma_i}(G) \mid G \in \mathfrak{X}),$$

если $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{X})$ и $\mathfrak{X}(\sigma_i) = \emptyset$, если $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{X})$.

Пусть $\mathfrak{H}$ – некоторый класс групп. Формацию $\mathfrak{F}$ называют *минимальной τ -замкнутой не $\mathfrak{F}$ -формацией* или *$\mathfrak{F}^\tau$ -критической формацией*, если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все собственные τ -замкнутые подформации из $\mathfrak{F}$ содержатся в $\mathfrak{H}$.

Следуя [1], [2] τ -замкнутую σ -локальную формацию $\mathfrak{F}$ мы называем *минимальной τ -замкнутой σ -локальной не $\mathfrak{H}$ -формацией* или *$\mathfrak{H}_\sigma^\tau$ -критической формацией*, если $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$, но все ее собственные τ -замкнутые σ -локальные подформации содержатся в классе групп $\mathfrak{H}$.

Для всякой непустой формации $\mathfrak{F}$ и любой группы G через $G^\mathfrak{F}$ обозначают пересечение всех нормальных подгрупп N группы G , для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Подгруппу $G^\mathfrak{F}$ называют *$\mathfrak{F}$ -корадикалом* группы G .

Пусть $\mathfrak{H}$ – непустая формация, $\mathfrak{F}$ – некоторый класс групп. *Корадикальное произведение $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ классов групп $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$* определяется следующим образом: $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{H}$ тогда и только тогда, когда $G^\mathfrak{H} \in \mathfrak{F}$.

2 Вспомогательные результаты

Для доказательства основных результатов нам понадобятся некоторые известные факты теории σ -локальных формаций, которые мы сформулируем в виде следующих лемм.

Лемма 2.1 [19, лемма 2.1]. Пусть f и h – формационные σ -функции и пусть $\Pi = \text{Supp}(f)$. Допустим, что $\mathfrak{F} = LF_{\sigma}(f) = LF_{\sigma}(h)$. Тогда:

- (1) $\Pi = \sigma(\mathfrak{F})$;
- (2) $\mathfrak{F} = (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)) \cap \mathfrak{G}_{\Pi}$. Следовательно, $\mathfrak{F}$ является насыщенной формацией.
- (3) Если каждая группа из $\mathfrak{F}$ является σ -разрешимой, то $\mathfrak{F} = (\bigcap_{\sigma_i \in \Pi} \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)) \cap \mathfrak{G}_{\Pi}$.
- (4) Если $\sigma_i \in \Pi$, то $\mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(h(\sigma_i) \cap \mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{F}$.

(5) $\mathfrak{F} = LF_{\sigma}(F)$, где F – единственная формационная σ -функция, такая, что $F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} F(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $\sigma_i \in \Pi$ и $F(\sigma_i) = \emptyset$ для всех $\sigma_i \in \Pi'$. Более того, $F(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}(f(\sigma_i) \cap \mathfrak{F})$ для всех i .

Лемма 2.2 [20, пример 1.1]. (i) Для формации всех единичных групп (1) имеем $(1) = LF_{\sigma}(f)$, где $f(\sigma_i) = \emptyset$ для всех i .

(ii) Пусть $\mathfrak{N}_{\sigma}$ – класс всех σ -нильпотентных групп. Тогда $\mathfrak{N}_{\sigma}$ – формация и, очевидно, $\mathfrak{N}_{\sigma} = LF_{\sigma}(f)$, где $f(\sigma_i) = (1)$ для всех i .

(iii) Пусть теперь $\mathfrak{N}_{\sigma}^2$ – класс всех мета- σ -нильпотентных групп. Тогда $\mathfrak{N}_{\sigma}^2 = LF_{\sigma}(f)$, где $f(\sigma_i) = \mathfrak{N}_{\sigma}$ для всех i .

Лемма 2.3 [16, теорема 3.18.]. Класс $\mathfrak{N}_{\sigma}$ является наследственной насыщенной формацией. Более того, $\mathfrak{N}_{\sigma}$ является классом Фиттинга.

Лемма 2.4 [23, лемма 11]. Пусть $\mathfrak{M}$ – непустая наследственная формация, $\mathfrak{F}$ – непустая τ -замкнутая формация. Тогда $\mathfrak{M}\mathfrak{F}$ является τ -замкнутой формацией.

Лемма 2.5 [19, теорема 1.13]. Множество S_n^{σ} всех n -кратно σ -локальных формаций образует подполугруппу полугруппы всех формаций $G\mathfrak{F}$. Более того, $|S_n^{\sigma}| = 2^{\aleph_0}$ для каждого σ с $|\sigma| > 1$ и $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$ является минимальным идемпотентом в S_n^{σ} для всех $n > 0$ и $i \in I$.

3 Основной результат

Пусть $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_{\sigma}^2$ – формация всех мета- σ -нильпотентных групп. Минимальную τ -замкнутую σ -локальную не $\mathfrak{N}_{\sigma}^2$ -формацию мы называем

минимальной τ -замкнутой σ -локальной не мета- σ -нильпотентной формацией.

Доказательство теоремы С. Пусть f – наименьшее τ -значное σ -локальное определение формации $\mathfrak{F}$, h – каноническое σ -локальное определение формации $\mathfrak{H} = \mathfrak{N}_{\sigma}^2$. В силу лемм 2.1 (5) и 2.2 (iii) имеем $h(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{N}_{\sigma}$ для любого i .

Необходимость. Пусть $\mathfrak{F}$ – минимальная τ -замкнутая σ -локальная не $\mathfrak{H}$ -формация. Согласно теореме А имеем $\mathfrak{F} = L_{\sigma}^{\tau} \text{form } G$, где G – такая монолитическая $\bar{\tau}$ -минимальная не $\mathfrak{H}$ -группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{H}}$, что выполняется одно из следующих условий:

- 1) $G = P$ – такая простая σ_i -группа, что $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{H})$ и $\tau(G) \subseteq \{1, G\}$;
- 2) P – не σ -примарная группа и G – $\bar{\tau}$ -минимальная не $h(\sigma_i)$ -группа с $P = G^{h(\sigma_i)}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(P)$;
- 3) $G = P \rtimes K$, где $P = C_G(P)$ – p -группа, $p \in \sigma_i$, а K – либо монолитическая $\bar{\tau}$ -минимальная не $h(\sigma_i)$ -группа с монолитом $Q = K^{h(\sigma_i)} \not\subseteq \Phi(K)$, где $\sigma_i \notin \sigma(Q)$, либо минимальная не $h(\sigma_i)$ -группа одного из следующих типов: а) группа кватернионов порядка 8, если $2 \notin \sigma_i$; б) экстраспециальная группа порядка q^3 простой нечетной экспоненты $q \notin \sigma_i$; в) циклическая q -группа, $q \notin \sigma_i$.

Согласно лемме 2.3 формация $\mathfrak{N}_{\sigma}$ является наследственной и, кроме того, наследственной, очевидно, является и формация $\mathfrak{G}_{\sigma_i}$, поэтому, в силу леммы 2.4, наследственными формациями являются произведения $\mathfrak{N}_{\sigma} \mathfrak{N}_{\sigma}$ и $\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{N}_{\sigma}$. Следовательно, данные формации являются τ -замкнутыми для любого подгруппового функтора τ . Поэтому, в силу [7, замечание 2.2.12], требование $\bar{\tau}$ -минимальности групп G и K в условии теоремы А может быть заменено на соответствующее требование τ -минимальности указанных групп.

Заметим, что для группы G случай 1) невозможен, поскольку

$$\sigma(\mathfrak{H}) = \sigma(\mathfrak{N}_{\sigma}^2) = \sigma.$$

Допустим, что группа G удовлетворяет условию 2). Тогда, поскольку $h(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{N}_{\sigma}$ для любого i , то P – такая не σ -примарная группа, что G – τ -минимальная не $(\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{N}_{\sigma})$ -группа с $P = G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{N}_{\sigma}}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(P)$.

Пусть $\mathfrak{X}$ – совокупность всех собственных τ -подгрупп группы G , $\sigma_j, \sigma_r \in \sigma(P)$, $j \neq r$. Тогда имеет место включение

$$\begin{aligned}\mathfrak{X} &\subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_j} \mathfrak{N}_{\sigma} \cap \mathfrak{G}_{\sigma_r} \mathfrak{N}_{\sigma} = \\ &= (\mathfrak{G}_{\sigma_j} \cap \mathfrak{G}_{\sigma_r}) \mathfrak{N}_{\sigma} = (1) \mathfrak{N}_{\sigma} = \mathfrak{N}_{\sigma}.\end{aligned}$$

Следовательно, G – τ -минимальная не σ -нильпотентная группа.

Кроме того, поскольку

$$\begin{aligned}G/P &\in h(\sigma_j) \cap h(\sigma_r) = \\ &= \mathfrak{G}_{\sigma_j} \mathfrak{N}_{\sigma} \cap \mathfrak{G}_{\sigma_r} \mathfrak{N}_{\sigma} = (\mathfrak{G}_{\sigma_j} \cap \mathfrak{G}_{\sigma_r}) \mathfrak{N}_{\sigma} = \mathfrak{N}_{\sigma},\end{aligned}$$

то $P = G^{\mathfrak{N}_{\sigma}}$. Таким образом, группа G удовлетворяет условию (1) теоремы.

Пусть, наконец, для группы G выполняется условие 3). Тогда, с учетом описания канонического σ -локального определения формации $\mathfrak{N}_{\sigma}^2$, имеем $G = P \rtimes K$, где $P = C_G(P)$ – p -группа, $p \in \sigma_i$, а K – монолитическая τ -минимальная не $(\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{N}_{\sigma})$ -группа с монолитом $Q = K^{\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{N}_{\sigma}} \not\subseteq \Phi(K)$, где $\sigma_i \notin \sigma(Q)$.

Ввиду того, что $K \simeq G/P \in \mathfrak{N}_{\sigma}^2 \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma}$, то группа K σ -разрешима. Поэтому Q – σ -примарная группа, т. е. σ_j -группа для некоторого $j \neq i$. Кроме того, поскольку $K \in \mathfrak{N}_{\sigma}^2 \setminus \mathfrak{N}_{\sigma}$, так как $G \notin \mathfrak{N}_{\sigma}^2$, то $K/F_{\sigma}(K) \in \mathfrak{N}_{\sigma}$ и $K/F_{\sigma}(K)$ – неединичная группа. В силу монолитичности группы K имеет место равенство $F_{\sigma}(K) = O_{\sigma_j}(K)$. Поэтому группа G удовлетворяет условию (2) теоремы.

Достаточность. Пусть $\mathfrak{F} = l_{\sigma}^{\tau} \text{form} G$ – формация, удовлетворяющая условиям теоремы. Покажем, что $\mathfrak{F}$ является минимальной τ -замкнутой σ -локальной не мета- σ -нильпотентной формацией.

Пусть для группы G выполняется условие (1). Ввиду теоремы А для доказательства утверждения теоремы достаточно показать, что G – τ -минимальная не $h(\sigma_i)$ -группа с $P = G^{h(\sigma_i)}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(P)$.

Пусть $\mathfrak{X}$ – совокупность всех собственных τ -подгрупп группы G . Поскольку G – τ -минимальная не σ -нильпотентная группа и $h(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{N}_{\sigma}$ для любого i , то

$$\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{N}_{\sigma} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{N}_{\sigma} = h(\sigma_i).$$

Так как при этом $G \notin \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{N}_{\sigma} \subseteq \mathfrak{N}_{\sigma}^2$, то G – τ -минимальная не $h(\sigma_i)$ -группа для любого σ_i ,

а значит и для любого $\sigma_i \in \sigma(P)$. Покажем, что $P = G^{h(\sigma_i)}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(P)$.

Действительно, так как по условию $P = G^{\mathfrak{N}_{\sigma}}$, то

$$G/P \in \mathfrak{N}_{\sigma} \subseteq \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{N}_{\sigma} = h(\sigma_i).$$

Поэтому $G^{h(\sigma_i)} \subseteq P$. С другой стороны, поскольку $G \notin \mathfrak{N}_{\sigma}^2$, то $G \notin \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{N}_{\sigma} \subseteq \mathfrak{N}_{\sigma}^2$ и, значит, $P \subseteq G^{h(\sigma_i)}$. Следовательно, $P = G^{h(\sigma_i)}$ для всех $\sigma_i \in \sigma(P)$.

Таким образом, группа G удовлетворяет условию 2) теоремы А. Поэтому $\mathfrak{F}$ является минимальной τ -замкнутой σ -локальной не мета- σ -нильпотентной формацией.

Пусть теперь для группы G выполняется условие (2). Покажем, что в этом случае для группы G выполняются требования условия 3) теоремы А. Действительно, ввиду того, что $h(\sigma_k) = \mathfrak{G}_{\sigma_k} \mathfrak{N}_{\sigma}$ для любого k , имеет место $G = P \rtimes K$, где $C_G(P) = P$ – p -группа, $p \in \sigma_i$, а K – такая монолитическая τ -минимальная не $h(\sigma_i)$ -группа с монолитом Q , что $Q = K^{h(\sigma_i)}$ – σ_j -группа, $j \neq i$ и $K/O_{\sigma_j}(K)$ – неединичная σ -нильпотентная группа. Заметим также, что $K^{h(\sigma_i)} \not\subseteq \Phi(K)$, поскольку в силу лемм 2.1 (2) и 2.5 формация $h(\sigma_k) = \mathfrak{G}_{\sigma_k} \mathfrak{N}_{\sigma}$ является насыщенной. Таким образом, группа G удовлетворяет всем требованиям условия 3) теоремы А. Значит, $\mathfrak{F}$ является минимальной τ -замкнутой σ -локальной не мета- σ -нильпотентной формацией. $\square$

Приведем некоторые, наиболее важные, следствия доказанной теоремы.

Так, если τ – тривиальный подгрупповой функтор, из теоремы С получаем

Следствие 3.1 [9, следствие 2.10]. *Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной σ -локальной не мета- σ -нильпотентной формацией, когда $\mathfrak{F} = l_{\sigma}^{\tau} \text{form} G$, где G – такая монолитическая группа с монолитом P , что выполняется одно из следующих условий:*

- 1) $P = G^{\mathfrak{N}_{\sigma}}$ – не σ -примарная группа;
- 2) $G = P \rtimes K$, где $P = C_G(P)$ – p -группа, $p \in \sigma_i$, а K – такая монолитическая группа с монолитом $Q = K^{\mathfrak{N}_{\sigma}}$, что $\sigma_i \notin \sigma(Q)$.

Кроме того, если $s_n \leq \tau$, то из теоремы С получаем

Следствие 3.2. *Пусть $s_n \leq \tau$. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ является минимальной τ -замкнутой σ -локальной не мета- σ -нильпотентной формацией,*

когда $\mathfrak{F} = l_{\sigma}^{\tau} \text{form} G$, где G – такая монолитическая τ -минимальная не мета- σ -нильпотентная группа с монолитом $P = G^{\mathfrak{M}_{\sigma}^{\tau}}$, что выполняется одно из следующих условий:

- (1) G – простая не σ -примарная τ -минимальная не σ -нильпотентная группа;
- (2) $G = P \rtimes T$, где $C_G(P) = P$ – p -группа, $p \in \sigma_i$, а T – такая монолитическая τ -минимальная не $(\mathfrak{F}_{\sigma_i} \mathfrak{M}_{\sigma})$ -группа с монолитом Q , что $Q = T^{\mathfrak{F}_{\sigma_i} \mathfrak{M}_{\sigma}}$ – σ_j -группа, $j \neq i$ и $T/O_{\sigma_j}(Q)$ – неединичная σ -нильпотентная группа.

В классическом случае, когда $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$ из теоремы С получаем следующие известные результаты.

Следствие 3.3 [7, следствие 2.4.11]. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ – минимальная τ -замкнутая локальная неметанильпотентная формация, когда $\mathfrak{F} = \tau^l \text{form} G$, где G – такая монолитическая τ -минимальная не метанильпотентная группа с монолитом P , что выполняется одно из следующих условий:

- (1) $P = G^{\mathfrak{M}}$ – неабелева группа, G – τ -минимальная ненильпотентная группа;
- (2) $G = P \rtimes H$, где $P = C_G(P)$, $H = Q \rtimes N$ – монолитическая группа с монолитом $Q = C_H(Q)$ и N – нильпотентная группа.

Следствие 3.4 [7, следствие 2.4.12]. Пусть $s_n \leq \tau$. Тогда $\mathfrak{F}$ в том и только в том случае является минимальной τ -замкнутой локальной неметанильпотентной формацией, когда $\mathfrak{F} = \tau^l \text{form} G$, где группа G удовлетворяет одному из следующих условий:

- (1) G – простая неабелева τ -минимальная ненильпотентная группа;
- (2) $G = P \rtimes T$, где $C_G(P) = P$ – минимальная нормальная подгруппа в G , T – группа Шмидта с $\Phi(T) = 1$.

Если при этом τ – тривиальный подгрупповой функтор, из теоремы С вытекает

Следствие 3.5 [14, следствие 19.11]. Тогда и только тогда $\mathfrak{F}$ – минимальная локальная неметанильпотентная формация, когда $\mathfrak{F} = l \text{form} G$, где G – такая монолитическая группа с монолитом P , что выполняется одно из следующих условий:

- (1) $P = G^{\mathfrak{M}}$ – неабелева группа;
- (2) $G = P \rtimes (Q \rtimes N)$, где $P = C_G(P)$, $Q = C_{Q \rtimes N}(Q)$ – минимальная нормальная подгруппа в $Q \rtimes N$ и N – нильпотентная группа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шеметков, Л. А. Экраны ступенчатых формаций / Л. А. Шеметков // Тр. VI Всесоюз. симпозиум по теории групп. – Киев : Наукова думка. – 1980. – С. 37–50.
2. Скиба, А. Н. О критических формациях / А. Н. Скиба // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1980. – № 4. – С. 27–33.
3. Скиба, А. Н. О критических формациях / А. Н. Скиба // Докл. АН БССР. – 1983. – Т. 27, № 9. – С. 780–782.
4. Скиба, А. Н. Формации со сверхразрешимыми локальными подформациями / А. Н. Скиба // Группы и др. алгебраические системы с условиями конечности. Новосибирск : Наука. – 1984. Т. 4. – С. 101–118.
5. Скиба, А. Н. О минимальных локальных не p -сверхразрешимых формациях / А. Н. Скиба // Вопросы алгебры. – 1985. – № 1. – С. 105–112.
6. Скиба, А. Н. О критических формациях / А. Н. Скиба // В кн.: Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. Киев : Ин-т математики АН Украины. – 1993. – С. 258–268.
7. Скиба, А. Н. Алгебра формаций / А. Н. Скиба. – Мн. : Беларуская навука, 1997. – 240 с.
8. Сафонова, И. Н. О минимальных σ -локальных не- $\mathfrak{H}$ -формациях конечных групп / И. Н. Сафонова // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 4 (45). – С. 105–112.
9. Сафонова, И. Н. О критических σ -локальных формациях конечных групп / И. Н. Сафонова // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2023. – Т. 31, № 2. – С. 63–80.
10. Сафонова, И. Н. О $\mathfrak{H}_{\sigma}^{\tau}$ -критических формациях конечных групп / И. Н. Сафонова, В. В. Скрундзь // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 3 (64). – С. 99–111.
11. Сафонова, И. Н. Минимальные τ -замкнутые σ -локальные не $\mathfrak{H}$ -формации конечных групп / И. Н. Сафонова, В. В. Скрундзь // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2025. – Т. 69, № 5. – С. 359–366.
12. Сафонова, И. Н. К теории $\mathfrak{H}_{\sigma}^{\tau}$ -критических формаций конечных групп / И. Н. Сафонова, В. В. Скрундзь // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2025. – № 6 (153). – С. 94–101.
13. Skrzundz, V. V. On the existence of $\mathfrak{H}_{\sigma}^{\tau}$ -critical formations of finite groups / V. V. Skrzundz, I. N. Safonova // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2026. – Т. 62, № 1. – С. 7–14.
14. Шеметков, Л. А. Формации алгебраических систем / Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба. – М. : Наука, 1989.

15. Skiba, A. N. On σ -properties of finite groups I / A. N. Skiba // Проблемы физики, математики и техники. – 2014. – № 4 (21). – С. 89–96.
16. Skiba, A. N. On σ -properties of finite groups II / A. N. Skiba // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 3 (24). – С. 70–83.
17. Skiba, A. N. On σ -subnormal and σ -permutable subgroups of finite groups / A. N. Skiba // J. Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16.
18. Skiba, A. N. On one generalization of the local formations / A. N. Skiba // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 1 (34). – P. 79–82.
19. Chi, Z. On n -multiply σ -local formations of finite groups / Z. Chi, V. G. Safonov, A. N. Skiba // Communications in Algebra. – 2019. – Vol. 47, № 3. – P. 957–968.
20. Zhang, Ch. On Σ_t^σ -closed classes of finite groups / Ch. Zhang, Z. Chi, A. N. Skiba // Ukrainian Mathematical Journal. – 2019. – Vol. 70, № 2. – P. 1707–1716.
21. Safonova, I. N. On the τ -closedness of n -multiply σ -local formation / I. N. Safonova // Advances in Group Theory and Applications. – 2024. – Vol. 18, № 1. – P. 123–136.
22. Сафонова, И. Н. О n -кратной σ -локальности непустой τ -замкнутой формации конечных групп / И. Н. Сафонова // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2024. – Т. 32, № 1. – С. 32–38.
23. Сафонов, В. Г. Характеризация разрешимых однопорожденных тотально насыщенными формациями конечных групп / В. Г. Сафонов // Сибирский математический журнал. – 2007. – Т. 48, № 1. – С. 185–191.

Исследования выполнены в рамках задания Государственной программы научных исследований «Конвергенция – 2025» при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь (проект 20211328).

Поступила в редакцию 15.03.2026.

Информация об авторах

Скрундь Валентина Викторовна – аспирант