

УДК 517.947

МАТЕМАТИКА

Академик С. М. НИКОЛЬСКИЙ

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ПЕРВОГО РОДА С СИЛЬНЫМ
ВЫРОЖДЕНИЕМ

Пусть Ω есть ограниченная область пространства R_n точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, r — натуральное число, α и p — действительные, где $1 \leq p \leq \infty$, $\rho = \rho(x)$ — расстояние от точки x до Γ — границы Ω , $W_{p\alpha}^r(\Omega)$ — весовой класс функций f , определенных на Ω , с конечной нормой

$$\|f\|_{W_{p\alpha}^r(\Omega)} = \|f\|_{L_p(\Omega)} + \|f\|_{w_{p\alpha}^r(\Omega)},$$

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

$$\|f\|_{w_{p\alpha}^r(\Omega)} = \sum_{|k|=r} \left\| \frac{f^{(k)}}{\rho^\alpha} \right\|_{L_p(\Omega)}, \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

$$f^{(k)} = \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}, \quad |k| = \sum_1 k_j.$$

Используя терминологию теорем вложения для нормированных пространств E, E' функций f с нормами соответственно $\|f\|_E, \|f\|_{E'}$, мы пишем $E \rightarrow E'$, если $E \subset E'$ и $\|f\|_{E'} \leq C \|f\|_E$, где C не зависит от $f \in E$.

Справедливы три свойства, на которых в основном базируются доказательства излагаемых ниже фактов:

$$1) \quad W_{p,\alpha}(\Omega) \rightarrow W_{p,\alpha_s}^{r-s}(\Omega), \quad 1 \leq p \leq \infty,$$

$$\alpha_s < \frac{1}{p}, \quad \alpha_s \leq \alpha + s.$$

2) Если $1 < p \leq \infty$, $0 < r + \alpha - 1/p < r$, s_0 — наименьшее натуральное число, не меньшее $r + \alpha - 1/p$, и Γ — $(n-1)$ -мерная граница класса C^{s_0+1} , то произвольная функция $f \in W_{p\alpha}^r(\Omega)$ имеет s_0 граничных значений (функций)

$$\left. \frac{\partial^s f}{\partial n^s} \right|_{\Gamma} = \varphi_s \in L_p(\Gamma), \quad s = 0, 1, \dots, s_0 - 1.$$

Мы не указываем здесь более точно классы, к которым принадлежат функции φ_s .

3) При тех же условиях, как в свойстве 2), и дополнительном условии $r/2 \leq s_0 \leq r$

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} \leq C \left(\sum_{0 \leq s+l < r/2} \|\varphi_s\|_{W_p^l(\Gamma)} + \|f\|_{w_{p\alpha}^r(\Omega)} \right) \leq \|f\|_{W_{p\alpha}^r(\Omega)}.$$

Свойства 1), 2), во всяком случае, известны, когда Γ есть плоская граница (библиографию по этому поводу см. (1)), свойство 3) установлено в нашей совместной статье с П. И. Лизоркиным (2). Все эти три свойства могут быть доказаны сначала в одномерном случае, когда Ω есть конечный интервал, а переход к многомерному случаю осуществляется при помощи метода «регулярных мостов», обоснованного в (3).

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$Lu = F, \quad x \in \Omega, \quad F = F(x) \in L_2(\Omega),$$

$$Lu = \sum_{|k|, |l| \leq r} (-1)^{|l|} D^{(l)} (a_{kl} U^{(k)}), \quad D^{(l)} \varphi = \varphi^{(l)},$$

где

$$a_{kl} = a_{lk} = a_{lk}(x), \quad x \in \Omega,$$

измеримые функции, определенные на Ω , зависящие от указанных пар $k = (k_1, \dots, k_n)$, $l = (l_1, \dots, l_n)$ целочисленных неотрицательных векторов, удовлетворяющие неравенствам

$$|a_{kl}(x)| \leq \frac{M}{\rho(x)^{\alpha_{kl}}}, \quad (1)$$

$$\alpha_{k,l} < \frac{1}{2}, \quad \alpha_{kl} \leq r + \alpha - \max_{|k|, |l| \leq r} (|k|, |l|).$$

Предполагается еще выполнение условия вырожденной эллиптичности

$$\sum_{|k|, |l| \leq r} a_{kl}(x) \xi_k \xi_l \geq \frac{\kappa}{\rho(x)^{2\alpha}} \sum_{|k| = r} \xi_k^2, \quad (2)$$

где ξ_k — переменные, зависящие от k , а κ — константа, не зависящая от этих переменных и от x .

Зададим функцию $\Phi \in W_{2\alpha}^r(\Omega)$. При условии 3) (следовательно, и 2)), которое мы будем предполагать выполненным, функция Φ имеет s_0 граничных значений

$$\left. \frac{\partial^s \Phi}{\partial n^s} \right|_{\Gamma} = \varphi_s, \quad s = 0, 1, \dots, s_0 - 1.$$

Пусть $\mathfrak{M}$ есть класс функций $f \in W_{2\alpha}^r(\Omega)$, имеющих те же граничные значения:

$$\left. \frac{\partial^s f}{\partial n^s} \right|_{\Gamma} = \left. \frac{\partial^s \Phi}{\partial n^s} \right|_{\Gamma}, \quad s = 0, 1, \dots, s_0 - 1,$$

и $\mathfrak{M}_0$ — класс функций $f \in W_{2\alpha}^r(\Omega)$ с нулевыми граничными значениями ($\varphi_s = 0$).

Введем билинейную форму

$$E(f, \varphi) = \int_{\Omega} \sum_{|k|, |l| \leq r} a_{kl} f^{(k)} \varphi^{(l)} dx$$

и квадратичную форму

$$E(f, f) = E(f).$$

С помощью свойства 1) и неравенств (1), (2) доказывается, что если $f \in W_{2\alpha}^r(\Omega)$, то $\|f\|_{L_2(\Omega)} + E(f)^{1/2} < \infty$, и наоборот.

Теперь известными рассуждениями с привлечением свойства 3) устанавливается существование и единственность решения вариационной задачи

$$\min_{f \in \mathfrak{M}} [E(f) - 2(F, f)] = F(u) - 2(F, u),$$

или, что все равно в данном случае, существование и единственность обобщенного решения $u \in \mathfrak{M}$, т. е. такой функции $u \in \mathfrak{M}$, для которой

$$E(u, v) - 2(F, v) = 0$$

для всех $v \in \mathfrak{M}_0$ (см. (2)).

Пусть теперь v и γ целые и $0 \leq v \leq \gamma$. Тогда, с учетом того, что $\alpha < 1/2$ и $\alpha \leq \alpha - v + \gamma$, на основании свойства 1) имеет место вложение

$$W_{2, \alpha - v}^{r + \gamma}(\Omega) \rightarrow W_{2\alpha}^r(\Omega). \quad (3)$$

Если считать, что исходная определяющая класс $\mathfrak{M}$ функция Φ принадлежит к $W_{2,\alpha-\nu}^{2+\gamma}(\Omega)$, то на основании (3) Φ принадлежит также к $W_{2,x}^r(\Omega)$ и при выполнении свойства 3) можно считать, что Φ порождает граничные условия нашей вариационной задачи.

Ниже формулируется теорема для случая $r=1$.

Теорема. Пусть граница Γ класса C^2 и ν, γ — целые, $0 \leq \nu \leq \gamma$, $-1/2 < \alpha < 1/2$,

$$\begin{aligned}\Phi(x) &\in W_{2,\alpha-\nu}^{1+\gamma}(\Omega), \\ |a_{kl}^{(\lambda)}(x)| &\leq \frac{C}{\rho(x)^{\alpha-\nu}}, \quad x \in \Omega, \quad |\lambda| \leq \gamma, \\ \|F\rho^\alpha\|_{L_2(\Omega)} &< \infty, \quad \gamma \leq 1, \\ \|F^{(k)}\rho^\alpha\|_{L_2(\Omega)} &< \infty, \quad |k| \leq \gamma-1, \quad \gamma > 1,\end{aligned}$$

где C не зависит от x .

Тогда решение краевой задачи $u \in W_{2,\alpha-\nu}^{1+\gamma}(\Omega)$.

Этот результат при $\alpha=\nu=0$ хорошо известен. Все же и при $\alpha=0$ эта теорема привносит нечто, утверждая (при наличии соответствующих условий на a_{kl} и F), что если $\Phi \in W_{2,-\nu}^{r+\gamma}$, то и $u \in W_{2,-\nu}^{r+\gamma}$.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
10 II 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ С. М. Никольский, УМН, т. 16, № 5, 63 (1961). ² С. М. Никольский, П. И. Лизоркин, ДАН, т. 159, № 3, 512 (1964). ³ С. М. Никольский, Societatea de stiinte Matematice si Fizice Din RPR Filiala Cluj, Mathematica, v. 8(31), № 2, 345 (1965).