

И. И. ПАРОВИЧЕНКО

О ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТИ δs -ОПЕРАЦИЙ

(Представлено академиком П. С. Александровым 4 XI 1974)

1. В работе ⁽¹⁾ Ю. С. Очан предпринял попытку установить критерий перестановочности двух δs -операций, т. е. условие выполнения равенства

$$\Phi_{\mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_1} \Phi(M_{x_1 x_2}) = \Phi_{\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2} \Phi(M_{x_1 x_2})$$

тождественно относительно семейств множеств $M_{x_1 x_2}$, обозначенных упорядоченными парами индексов, пробегающих счетное множество X , где слева (справа) сперва $\Phi_{\mathfrak{B}_1}(\Phi_{\mathfrak{B}_2})$ применяется по x_1 (x_2) при фиксированном x_2 (x_1), а затем применяется $\Phi_{\mathfrak{B}_2}(\Phi_{\mathfrak{B}_1})$ по x_2 (x_1). Однако в ⁽¹⁾ использовано два утверждения, из которых одно, как было обнаружено в ⁽²⁾ А. Д. Таймановым, оказалось ошибочным *, а другое — недоказанным (см. ниже). Целью настоящей работы является приведение доказательства критерия перестановочности δs -операций. Это достигается соответствующим видоизменением первоначальной попытки Ю. С. Очана.

2. Мы будем пользоваться терминологией нашей работы ⁽³⁾, напомним и добавив следующее. Слово «база» δs -операции у нас всегда означает экстенсивную систему. «пополняющую» ее любую «подбазу». «порождаемую» от нее. Жесткой подбазой мы называем подбазу, состоящую из всех минимальных множеств базы. Жесткая подбаза, если она существует, определяется операцией однозначно. Терминами «подбаза» и «жесткая подбаза» мы будем пользоваться не только применительно к δs -операциям, но и к любым экстенсивным системам в соответствии с тем, что между последними и δs -операциями, для которых системы служат (полными) базами, существует естественное взаимно однозначное соответствие.

Если $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{P}(X)$, то полагаем $\mathfrak{B}^* = \{A \mid \forall B, A \cap B \neq \emptyset\}$; $\mathfrak{B}^*$ всегда экстенсивна. Имеем $(\mathfrak{B}^*)^* = \mathfrak{B}$, если $\mathfrak{B}$ экстенсивна, и в этом случае системы $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}^*$ назовем дуальными. Система $\mathfrak{B}^*$ служит базой операции, дополнительной к операции с подбазой $\mathfrak{B}$. Имеет место соотношение $\mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{B}_2 \Rightarrow \mathfrak{B}_1^* \supseteq \mathfrak{B}_2^*$. Растром назовем такую экстенсивную систему $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{P}(X)$, что $A \not\subseteq \mathfrak{B}, B \not\subseteq \mathfrak{B} \Rightarrow A \cup B \not\subseteq \mathfrak{B}$. Как было замечено Ю. Шмидтом ⁽⁴⁾, растр и фильтр дуальны, причем фильтр будет ультрафильтром тогда и только тогда, когда он растр (тогда и только тогда он совпадает со своей дуальной системой). Для «плоской» системы $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{P}(X \times X)$ введем $\mathfrak{B}^{-1} = \{S \mid S^{-1} \in \mathfrak{B}\}$; очевидно $(\mathfrak{B}^*)^{-1} = (\mathfrak{B}^{-1})^*$. Как известно ^(1, 5), плоская база итерированной δs -операции $\Phi_{\mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_1}$ порождается подбазой из всех множеств вида: $U \cup \{\{x\} \times V_x \mid x \in U\}$, где $U \in \mathfrak{B}_2$ и $\forall x \in U, V_x \in \mathfrak{B}_1$. Эту плоскую базу обозначим через $\mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_1$. Для перестановочности операций с базами $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ необходимо и достаточно, чтобы было $\mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_1 = (\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2)^{-1}$, т. е. (инверсная) коммутативность введенной выше операции умножения для баз. Имеет место равенство $(\mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_1)^* = \mathfrak{B}_2^* \mathfrak{B}_1^*$, так как $\Phi_{(\mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_1)^*}(M_{x_1 x_2}) = C_{\mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_1} \Phi(C M_{x_1 x_2}) = C_{\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_1} \Phi(C M_{x_1 x_2}) = C_{\mathfrak{B}_2} C_{\mathfrak{B}_1} \Phi(M_{x_1 x_2})$.

* В ⁽²⁾ А. Д. Тайманов привел пример δs -операции с жесткой (под)базой, для которой дополнительная операция не имеет жесткой (под)базы, вопреки утверждению из ⁽¹⁾.

3. Систему $\mathfrak{K} \equiv \mathfrak{P}(X)$ назовем системой конечного типа, если все множества из $\mathfrak{K}$ конечны, и сильно конечного типа, если, кроме того, и $\mathfrak{K}$ конечна; последнее в ⁽¹⁾ Ю. С. Очаном названо конечной базой.

Лемма 1. Если экстенсивная система $\mathfrak{A}$ имеет подбазу конечного типа, то $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}^*$ имеют жесткие подбазы.

Доказательство. Утверждение для $\mathfrak{A}$ следует из того, что в конечном множестве содержится множество, минимальное относительно любого свойства. Для доказательства утверждения для $\mathfrak{A}^*$ предположим противное: $A \in \mathfrak{A}^*$ и в A нет минимального подмножества относительно $\mathfrak{A}^*$. По трансфинитной индукции существует строго убывающая вполне упорядоченная последовательность $A = A_0 \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_\xi \supset \dots$ некоторого предельного типа λ , что $\forall \xi < \lambda, A_\xi \in \mathfrak{A}^*$, но $\bigcap_{\xi} A_\xi = A \notin \mathfrak{A}^*$. Тогда существует $K \in \mathfrak{K}$

при $A \cap K = \emptyset$ и $\forall \xi, A_\xi \cap K \neq \emptyset$, что невозможно.

Следующая лемма сформулирована Ю. С. Очаном без доказательства ⁽¹⁾.

Лемма 2. Экстенсивная система $\mathfrak{A}$ с подбазой конечного типа имеет подбазу сильно конечного типа тогда и только тогда, когда дуальная система $\mathfrak{A}^*$ имеет подбазу конечного типа.

Доказательство. По лемме 1 $\mathfrak{A}$ имеет жесткую подбазу $\mathfrak{K} = \{K_\lambda \mid A \in \mathfrak{A}\}$ конечного типа. Если $\mathfrak{K}$ конечна, то все множества выбора для $\mathfrak{K}$ образуют подбазу конечного типа для $\mathfrak{A}^*$, так что остается доказать, что если $\mathfrak{A}^*$ имеет подбазу конечного типа, то $\mathfrak{K}$ конечна. Предположим противное: $\mathfrak{K}$ бесконечно, и докажем сперва такое

Предложение (*). Если $\mathfrak{K}_{\mathfrak{A}^*} = \{K_{\lambda_i} \mid \lambda_i \in \mathfrak{A}_i, i=1, 2, \dots, n\}$ — конечная подсистема в $\mathfrak{K}$, то существует функция выбора $\varphi_{\mathfrak{A}_i}$ для этой подсистемы со свойством, что область значений $\varphi_{\mathfrak{A}_i}$ не пересекает всех множеств исходной системы $\mathfrak{K}$.

Положим $S = \bigcup_{i=1}^n K_{\lambda_i}$ и введем на системе всех множеств из $\mathfrak{K}$, не содержащихся в S , отношение эквивалентности $\sim$ по правилу $K_\lambda \sim K_{\lambda'} \Leftrightarrow S \cap K_\lambda = S \cap K_{\lambda'}$. Так как S конечно, то один из классов эквивалентности должен быть бесконечным, а для множеств K_λ из этого класса $S \cap K_\lambda$ постоянно. Но тогда все разности $K_{\lambda_i} \setminus K_\lambda$ непусты ввиду жесткости подбазы, так как иначе $K_{\lambda_i} \subset K_\lambda$. Полагая $\varphi_{\mathfrak{A}_i}(\lambda_i) = y_i \in K_{\lambda_i} \setminus (K_\lambda \cap S)$, $i=1, 2, \dots, n$, получаем требуемое.

Из предложения (*) и теоремы Радо (см., например, ⁽⁶⁾) теперь следует существование функции выбора f для системы $\mathfrak{K}$ такой, что для каждого конечного $\mathfrak{Q}_0 \subseteq \mathfrak{Q}$ найдется конечное $\mathfrak{Q}_1 \subseteq \mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}_0 \subseteq \mathfrak{Q}_1$, что сужения f и $\varphi_{\mathfrak{A}_i}$ до $\mathfrak{Q}_0$ совпадают. Тогда область значений f принадлежит $\mathfrak{A}^*$, хотя никакое ее конечное подмножество не принадлежит $\mathfrak{A}^*$, т. е. $\mathfrak{A}^*$ без подбазы конечного типа. Лемма 2 доказана.

Фильтр назовем главным, если он имеет подбазу из одного множества (составляющую его жесткую подбазу). Дуальный к нему растр тоже назовем главным; он имеет жесткую подбазу из системы одноточечных множеств. Между тем имеет место

Лемма 3. Неглавный фильтр и неглавный растр не имеют жестких подбаз.

Доказательство. Для фильтра лемма очевидна. Пусть $\mathfrak{N} = \mathfrak{F}$ — неглавный растр, $\bigcap \mathfrak{F} = A \notin \mathfrak{F}$. Тогда $CA \in \mathfrak{N}$; докажем, что в CA нет минимального для $\mathfrak{N}$ множества. Сперва заметим, что никакое одноточечное множество в CA не принадлежит $\mathfrak{N}$, так как из $x \in CA$ следует существование $A_x \in \mathfrak{F}$, $x \notin A_x$. Пусть теперь $\mathcal{E} \subseteq CA$, $\mathcal{E} \in \mathfrak{N}$; тогда $\mathcal{E} \neq \emptyset$; берем $x \in \mathcal{E}$. По доказанному $\{x\} \notin \mathfrak{N}$, откуда $\mathcal{E} \setminus \{x\} \in \mathfrak{N}$ ввиду определения растра и $\mathcal{E}$ не минимально в $\mathfrak{N}$.

Лемма 4. Если для экстенсивных систем $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}$ не имеет подбазы конечного типа, а $\mathfrak{B}$ не имеет жесткой подбазы, то $\mathfrak{AB} \not\subseteq (\mathfrak{BA})^{-1}$.

Доказательство. Пусть $A \in \mathfrak{A}$, но никакое конечное подмножество A не принадлежит $\mathfrak{A}$, и пусть $B \in \mathfrak{B}$ и без минимальных подмножеств. Тогда для B существует строго убывающая последовательность $B = B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset B_x \supset \dots$, занумерованная натуральными числами *, что $\bigcap_x B_x = D \notin \mathfrak{B}$ (доказывается трансфинитной индукцией). Предположим теперь противное доказываемому: $\mathfrak{AB} \subseteq (\mathfrak{BA})^{-1}$. Тогда для $W \in \mathfrak{AB}$, $W = \bigcup \{ \{x\} \times B_x \mid x \in A \}$, $\forall V \in (\mathfrak{BA})^{-1}$, что $V \subseteq W$ и $V = \bigcup \{ A_y \times \{y\} \mid y \in C \}$, где $\forall y$, $A_y \in \mathfrak{A}$ и $C \in \mathfrak{B}$. Тогда, ввиду $D \notin \mathfrak{B}$, имеем $C \not\subseteq D$ и $C \setminus D \neq \emptyset$. Берем $y_0 \in C \setminus D$; тогда $A_{y_0} \times \{y_0\} \subseteq W$, откуда

$$\begin{aligned} A_{y_0} \times \{y_0\} &= (A_{y_0} \times \{y_0\}) \cap (\bigcup \{ \{x\} \times B_x \mid x \in A \}) = \\ &= \bigcup \{ (A_{y_0} \cap \{x\}) \times (\{y_0\} \cap B_x) \mid x \in A \} = \\ &= (\bigcup \{ A_{y_0} \cap \{x\} \mid x \in A, y_0 \in B_x \}) \times \{y_0\} = (A_{y_0} \cap A \cap \{x \mid y_0 \in B_x\}) \times \{y_0\}. \end{aligned}$$

что даст $A_{y_0} \subseteq A \cap \{x \mid y_0 \in B_x\}$. Но $\{x \mid y_0 \in B_x\}$ конечно, так как B_x строго убывают и $y_0 \notin \bigcap_x B_x = D$, откуда следует, что A_{y_0} конечно, вопреки включению $A_{y_0} \subseteq A$.

Лемма 5. Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — экстенсивные системы, причем $\mathfrak{A}$ — не растр, а $\mathfrak{B}$ — не фильтр, то $\mathfrak{AB} \not\subseteq (\mathfrak{BA})^{-1}$.

Доказательство. Пусть $A \in \mathfrak{A}$, $A = A_1 \cup A_2$, $A_1, A_2 \notin \mathfrak{A}$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ и $B', B'' \in \mathfrak{B}$, $B' \cap B'' \notin \mathfrak{B}$. Предположим противное доказываемому: $\mathfrak{AB} \subseteq (\mathfrak{BA})^{-1}$. Множество $W = \bigcup \{ \{x\} \times B_x \mid x \in A \}$, где B_x — множества из $\mathfrak{B}$, принадлежит $\mathfrak{AB}$. Положив $B_x = B'$ при $x \in A_1$ и $B_x = B''$ при $x \in A_2$, будем иметь $W = (A_1 \times B') \cup (A_2 \times B'') \in \mathfrak{AB}$. Тогда существует $V \in (\mathfrak{BA})^{-1}$, $V \subseteq W$, $V = \bigcup \{ A_y \times \{y\} \mid y \in C \}$, где $\forall y \in C$, $A_y \in \mathfrak{A}$ и $C \in \mathfrak{B}$. Но так как $B' \cap B'' \notin \mathfrak{B}$, то $C \not\subseteq B' \cap B''$, и поэтому существует $y_0 \in C \setminus (B' \cap B'')$. Тогда

$$\begin{aligned} A_{y_0} \times \{y_0\} \subseteq W &= (A_1 \times (B' \setminus B'')) \cup (A_1 \times (B' \cap B'')) \cup \\ &\cup (A_2 \times (B'' \setminus B')) \cup (A_2 \times (B' \cap B'')). \end{aligned}$$

Но $A_{y_0} \times \{y_0\}$ может содержаться лишь в первом либо третьем слагаемом, и если, например, в первом: $A_{y_0} \times \{y_0\} \subseteq A_1 \times (B' \setminus B'')$, то $A_{y_0} \subseteq A_1$, вопреки $A_1 \notin \mathfrak{A}$.

Лемма 6. Если $\mathfrak{F}$ — фильтр и $\mathfrak{A}$ — экстенсивная система с подбазой конечного типа, то $\mathfrak{AF} \subseteq (\mathfrak{FA})^{-1}$.

Доказательство. При $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} = A \in \mathfrak{A}$, $B_i \in \mathfrak{F}$, $i = 1, 2, \dots, n$, для подбазисного множества V произведения $\mathfrak{AF}$:

$$V = \bigcup_{i=1}^n (\{x_i\} \times B_i) \subseteq A \times \bigcap_{i=1}^n B_i = ((\bigcap_{i=1}^n B_i) \times A)^{-1} \in (\mathfrak{FA})^{-1},$$

и требуемое следует.

Лемма 7. Если $\mathfrak{R}$ — растр и $\mathfrak{B}$ — система, двойственная к экстенсивной системе с подбазой конечного типа, то $\mathfrak{RB} \subseteq (\mathfrak{BR})^{-1}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{R} = \mathfrak{F}^*$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^*$; тогда $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{A}$ — в условиях леммы 6, откуда

$$\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{F}^* = (\mathfrak{AF})^* \subseteq (\mathfrak{FA})^{-1*} = (\mathfrak{FA})^{*-1} = (\mathfrak{F} \cdot \mathfrak{A}^*)^{-1},$$

т. е.

$$(\mathfrak{A}^* \cdot \mathfrak{F}^*)^{-1} \subseteq \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{A}^* \quad \text{и} \quad \mathfrak{RB} \subseteq (\mathfrak{BR})^{-1}.$$

Лемма 8. Если $\mathfrak{U}$ — ультрафильтр и $\mathfrak{C}$ — экстенсивная система с подбазой сильно конечного типа, то $\mathfrak{UC} \subseteq (\mathfrak{CU})^{-1}$.

Доказательство. Ввиду леммы 6 имеем $\mathfrak{CU} \subseteq (\mathfrak{UC})^{-1}$, а ввиду леммы 7 имеем $(\mathfrak{UC})^{-1} \subseteq \mathfrak{CU}$ или $\mathfrak{UC} \subseteq (\mathfrak{CU})^{-1}$.

* Это единственное место в работе, где используется счетность индексного множества.

Лемма 9. Если $\mathfrak{A}$ — любая экстенсивная система и $\mathfrak{G}$ — главный фильтр, то $\mathfrak{AG} \equiv (\mathfrak{GA})^{-1}$.

Доказательство. Множества вида $A \times B$, где $A \in \mathfrak{A}$ и B порождает $\mathfrak{G}$, образуют подбазу $\mathfrak{AG}$. Но $B \times A \in \mathfrak{GA}$, $A \times B \equiv (\mathfrak{GA})^{-1}$, и требуемое следует.

Отсюда сразу вытекает

Лемма 10. Если $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$ — главные фильтры (главные растры), то $\mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2 = (\mathfrak{G}_2 \mathfrak{G}_1)^{-1}$.

Лемма 11. Если $\mathfrak{U}$ — фиксированный ультрафильтр, то для любой экстенсивной системы $\mathfrak{A}$ имеет место $\mathfrak{AU} = (\mathfrak{UA})^{-1}$.

Доказательство. Ввиду леммы 9, имеет $\mathfrak{AU} \equiv (\mathfrak{UA})^{-1}$ и $\mathfrak{A}^* \mathfrak{U} \equiv (\mathfrak{UA}^*)^{-1}$. Применяя предложение (*) к обеим частям последнего включения, имеем $\mathfrak{AU} \equiv (\mathfrak{UA})^{-1}$.

Лемма 12. Если $\mathfrak{F}$ — фильтр ($\mathfrak{F}$ — растр), $\mathfrak{G}$ — главный фильтр ($\mathfrak{G}^*$ — главный растр), порожденный конечным множеством (конечной системой одноточечных множеств), то $\mathfrak{FG} = (\mathfrak{GF})^{-1}$ ($\mathfrak{FG}^* = (\mathfrak{G}^* \mathfrak{F})^{-1}$).

Доказательство. Ввиду леммы 9, имеем $\mathfrak{FG} \equiv (\mathfrak{GF})^{-1}$, а ввиду леммы 6, имеем $\mathfrak{GF} \equiv (\mathfrak{FG})^{-1}$ и $(\mathfrak{GF})^{-1} \equiv \mathfrak{FG}$.

4. Следующая теорема была сформулирована Ю. С. Очаном в (1).

Теорема. Необходимым и достаточным условием для перестановочности двух $\delta\sigma$ -операций является наличие одного из шести следующих условий для пары их (полных) баз $\mathfrak{B}_1$ — $\mathfrak{B}_2$:

- 1) фиксированный ультрафильтр — любая база;
- 2) главный фильтр — главный фильтр;
- 3) главный растр — главный растр;
- 4) любой фильтр — главный фильтр с подбазой из одного конечного множества;

5) любой растр — главный растр с подбазой из конечного числа одноточечных множеств;

6) ультрафильтр — база с подбазой сильно конечного типа.

Доказательство. Рассмотрим три возможных случая.

1) $\mathfrak{B}_1$ — неглавный фильтр. Тогда, ввиду леммы 3, $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_1^*$ не имеют жестких подбаз, откуда, ввиду леммы 4, для перестановочности необходимо, чтобы $\mathfrak{B}_2$ и $\mathfrak{B}_2^*$ имели подбазы конечного типа. Но тогда, ввиду леммы 2, $\mathfrak{B}_2$ имеет подбазу сильно конечного типа. Если $\mathfrak{B}_1$ — ультрафильтр, то имеем случай 6) теоремы; если же $\mathfrak{B}_1$ — не ультрафильтр, то $\mathfrak{B}_1$ — не растр и ввиду леммы 5) для перестановочности необходимо, чтобы $\mathfrak{B}_2$ было фильтром, который будет порождаться конечным множеством, и ввиду леммы 12 получаем случай 4) теоремы.

2) $\mathfrak{B}_1$ — главный фильтр. Если $\mathfrak{B}_1$ — ультрафильтр, то он фиксирован и, ввиду леммы 11, имеем случай 1) теоремы. Если же $\mathfrak{B}_1$ — не ультрафильтр, то он не растр, и ввиду леммы 5 для перестановочности необходимо, чтобы $\mathfrak{B}_2$ было фильтром. Если он главный, то ввиду леммы 10 имеем случай 2) теоремы; если же он неглавный, то дело сводится к уже разобранному случаю для пары: $\mathfrak{B}_2$ — $\mathfrak{B}_1$.

3) $\mathfrak{B}_1$ — не фильтр. Ввиду леммы 5, для перестановочности необходимо, чтобы $\mathfrak{B}_2$ было растром. Но тогда $\mathfrak{B}_2^*$ — фильтр, и дело сводится к одному из уже разобранных случаев для пары $\mathfrak{B}_2^*$ — $\mathfrak{B}_1^*$.

Математический институт с Вычислительным центром
Академии наук МССР
Кишинев

Поступило
18 X 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Ю. С. Очан, Матем. сб., т. 10, № 3 (52), 151 (1942). ² А. Д. Тайманов, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 14, № 5, 443 (1950). ³ И. И. Паровиченко, УМН, т. 28, № 5 (173), 129 (1973). ⁴ J. Schmidt, Math. Nachr., B. 10, 197 (1953). ⁵ Ю. С. Очан, УМН, т. 10, № 3 (65), 71 (1955). ⁶ И. И. Паровиченко, ДАН, т. 184, № 1, 38 (1969).