

К. Н. СОЛТАНОВ

**ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ  
ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕЯВНЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ**

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 20 XII 1974)

В прямоугольнике  $Q=[0, 2\pi] \times [0, T]$  рассматривается смешанная задача

$$(-1)^m \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}(x, t, u, \dots, D^{2m-2}u) |D^{2m-2}u|^\rho D^{2m}u = h(x, t); \quad (1)$$

$$u(x, 0) = 0; \quad D^k u(0, t) = D^k u(2\pi, t), \quad k=0, 1, \dots, 2m-1, \quad \rho > 0. \quad (2)$$

Функция  $\mathcal{A}(x, t, \xi_0, \dots, \xi_{2m-2})$  удовлетворяет условию Каратеодори, причем существуют постоянные  $a_0 > 0, \mathcal{A}_0 > 0$  такие, что

$$a_0 \leq \mathcal{A}(x, t, \xi) \leq \mathcal{A}_0, \quad (x, t, \xi) \in Q \times \mathbb{R}^{2m-1}.$$

Таким образом, уравнение (1) есть нелинейное уравнение параболического типа, которое вырождается в тех точках  $(x, t) \in Q$ , где  $D^{2m-2}u=0$  (такое вырождение принято называть неявным).

Уравнение вида (1) встречается, например, в теории пограничного слоя  $\mathcal{A} \equiv 1, m=1$ , последнему уравнению (точнее, уравнению Прандтля) посвящен ряд работ (4-6), в которых изучается классическая разрешимость смешанной задачи.

В настоящей работе установлена разрешимость задачи (1), (2) в классах обобщенных функций.

Доказательство проводится методом Фаэдо — Галеркина — Хопфа и основано на теоремах компактного вложения нелинейных множеств с конечным «интегралом энергии».

1. Определения и формулировка теоремы. Обозначим через  $\mathcal{H}(Q)$  совокупность функций  $u(x, t): Q \rightarrow \mathbb{R}^1$ , удовлетворяющих следующим включениям:

$$\begin{aligned} & u \in L_p(0, T; W_p^{2m-2}(0, 2\pi)) \cap L^\infty(0, T; H^m(0, 2\pi)), \\ & |D^{2m-2}u|^{(\rho-1)/2} D^{2m-2}u \in L_{2q}(0, T; W_{2q}^1(0, 2\pi)); \\ & |D^{2m-2}u|^{\rho/2} D^{2m-2}u \in L_2(0, T; H^1(0, 2\pi)), \\ & |D^{2m-2}u|^\rho D^{2m-2}u \in L_q(0, T; W_q^2(0, 2\pi)); \quad \frac{\partial u}{\partial t} \in L_q(Q), \quad u(x, 0) = 0, \quad (*) \\ & D^k u(0, t) = D^k u(2\pi, t), \quad k=0, 1, \dots, 2m-1, \quad p = \rho + 2, \\ & q = \begin{cases} (\rho+2)/(\rho+1), & \rho \geq 1/2. \\ (2-\rho)/2(1-\rho), & \rho < 1/2. \end{cases} \end{aligned}$$

О п р е д е л е н и е. Функция  $u(x, t) \in \mathcal{H}(Q)$  называется решением задачи (1), (2), если удовлетворяет уравнению (1) в смысле пространства  $L_q(Q)$ , т. е. для любой функции  $v(x, t) \in L_{q'}(Q)$  справедливо тождество:

$$(-1)^m \left[ \frac{\partial u}{\partial t}, v \right] + [\mathcal{A}(x, t, u, \dots, D^{2m-2}u) |D^{2m-2}u|^\rho D^{2m}u, v] = [h, v], \quad (3)$$

где  $[\cdot, \cdot]$  — интеграл по  $Q$ .

При этом второе слагаемое регуляризуется следующим образом:

$$\begin{aligned} & [\mathcal{A}(x, t, u, \dots, D^{2m-2}u) |D^{2m-2}u|^{\rho} D^{2m}u, v] = \\ & = [\mathcal{A}(x, t, u, \dots, D^{2m-2}u) D(|D^{2m-2}u|^{\rho} D^{2m-1}u), v] - \\ & - \rho [\mathcal{A}(x, t, u, \dots, D^{2m-2}u) |D^{2m-2}u|^{\rho-2} D^{2m-2}u |D^{2m-1}u|^2, v]. \end{aligned} \quad (4)$$

Из (\*) следует, что слагаемые, находящиеся в правой части, имеют смысл.

**Теорема.** Для любой функции  $h(x, t) \in V(Q)$  существует по крайней мере одно решение  $u(x, t) \in \mathcal{H}(Q)$  задачи (1), (2), где

$$V(Q) = \begin{cases} L_q(0, T; W_q^1(0, 2\pi)) & \forall h \in V(Q), \quad h(0, t) = h(2\pi, t), \quad \text{при } \rho \leq 2, \\ L_q(0, T; W_q^2(0, 2\pi)) & \forall h \in V(Q), \quad D^j h(0, t) = D^j h(2\pi, t), \quad j=0, 1, \quad \text{при } \rho > 2. \end{cases}$$

Доказательство этой теоремы намечено в п. 3.

2. Теорема компактности.

**Лемма 1.** Пусть  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  удовлетворяют условиям  $-1 < \alpha_0 \leq 0, \alpha_2 \geq 1, \alpha_2 + \alpha_0(\alpha_2 - 1) \geq \alpha_1 \geq 1$ .

Тогда для любой функции  $v(x) \in C^2(0, 2\pi), D^j v(0) = D^j v(2\pi), j=0, 1$ , справедливо неравенство

$$\int_0^{2\pi} |v|^{\alpha_0} |Dv|^{\alpha_1 + \alpha_2} dx \leq K \int_0^{2\pi} |v|^{\alpha_0 + \alpha_1} |D^2 v|^{\alpha_2} dx. \quad (5)$$

**З а м е ч а н и е.** Левую часть можно написать в виде

$$\int_0^{2\pi} |v|^{\alpha_0} |Dv|^{\alpha_1 + \alpha_2} dx \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{1 + \alpha_0} \int_0^{2\pi} D(|v|^{\alpha_0} v) |Dv|^{\alpha_1 + \alpha_2 - 2} Dv dx, \quad (6)$$

где интеграл понимается в смысле обобщенных функций.

Подынтегральная функция в правой части почти всюду определена и конечна. При  $v(x) = 0$  подынтегральная функция почти всюду равняется нулю. Для дальнейшего заметим, что почти всюду

$$\frac{1}{1 + \alpha_0} D(|v|^{\alpha_0} v) |Dv|^{\alpha_1 + \alpha_2 - 2} Dv = \left| \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2} D(|v|^{\alpha_0 / (\alpha_1 + \alpha_2)} v) \right|^{\alpha_1 + \alpha_2}. \quad (7)$$

Доказательство леммы аналогично доказательству леммы 1 из (7).

**Лемма 2.** Пусть числа  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  удовлетворяют условиям  $\alpha_0 \geq 0, \alpha_2 \geq 1, \alpha_2 \geq \alpha_1 \geq 1$  (или  $\alpha_0 \geq 0, \alpha_2 \geq 2, \alpha_2 \geq \alpha_1 \geq 0$ ).

Тогда справедливо утверждение леммы 1.

**Лемма 3.** Пусть числа  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  удовлетворяют условиям  $\alpha_0 \geq 0, \alpha_2 \geq 1, \alpha_2 \geq \alpha_1 \geq 0$ .

Тогда для любой функции, удовлетворяющей условию леммы 1, справедливо неравенство

$$\int_0^{2\pi} |v|^{\alpha_0 + \alpha_1} |D^2 v|^{\alpha_2 - \alpha_1} dx \leq K \int_0^{2\pi} |v|^{\alpha_0} |D^2 v|^{\alpha_2} dx. \quad (8)$$

Для доказательства см. (7).

Введем следующие обозначения:

$$S_{v, r, q}(G) = \{v \mid \| |v|^r v \|_{W_{q\tau}(G)} < +\infty\}, \quad \gamma = 1, 2. \quad (9)$$

В этих множествах определим полунормы (см. (2))

$$[v]_{S_{1,r,q}(G)} = \left\{ \int_G |v|^r D^q v|^q dx \right\}^{1/(r+1)q}, \quad q > 1, r > 0. \quad (10)$$

Таким образом, определены два, вообще говоря нелинейных, полунормированных множества.

**Теорема 1** (см. (2) или (3)). *Вложение*

$$S_{1,r,q}(G) \subset L_{(r+1)q}(G) \text{ компактно.} \quad (11)$$

**О п р е д е л е н и е.** Вложение  $S_{2,r,q}(G) \subset S_{1,r,q}(G)$  назовем компактным, если из любого множества функций  $v(x)$ , для которых  $[v]_{S_{2,r,q}} \leq K$  ( $K > 0, K = \text{const}$ ), можно выбрать последовательность  $v_k(x)$  такую, что

$$v_k(x) \Rightarrow v(x) \text{ в } L_{(r+1)q}(G), \\ D(|v_k|^r v_k) \Rightarrow D(|v|^r v) \text{ в } L_q(G).$$

**Теорема 2.** *Вложение*

$$S_{2,r,q}(G) \subset S_{1,r,q}(G) \text{ компактно.} \quad (12)$$

**Теорема 3.** Пусть  $S(G)$  — полунормированное множество из  $L_p(G)$  ( $^9, ^{10}$ ), причем вложение  $S(G) \subset L_p(G)$  компактно.

Тогда вложение

$$\mathcal{P}(Q) \subset L_p(Q) \text{ компактно,} \quad (13)$$

где множество  $\mathcal{P}(Q)$  определено следующим образом:

$$\mathcal{P}(Q) = \left\{ u \mid \int_0^T [u]_{S(G)}^p dt < +\infty; \int_0^T \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L_q(G)}^q dt < +\infty \right\}.$$

Для доказательства см. (2).

**Теорема 4.** Пусть  $S_1(G)$  и  $S_2(G)$  — полунормированные множества ( $^9, ^{10}$ ), причем  $S_2(G) \subset S_1(G) \subset L_p(G)$  компактно.

Тогда вложение

$$\mathcal{P}_2(Q) \subset L_p(0, T; S_1(G)) \text{ компактно.} \quad (14)$$

3. Построение приближенного решения. Предельный переход. Решение  $u_n(x, t)$  будем искать в виде

$$u_n(x, t) = \sum_{k=1}^n c_{nk}(t) w_k(x), \quad \{w_k(x)\} = \{(\cos \lambda_k x, \sin \lambda_k x)\},$$

при этом коэффициенты  $c_{nk}(t)$  ищутся из системы дифференциальных уравнений

$$(-1)^m \left\langle \frac{\partial u_n}{\partial t}, w_k \right\rangle + \langle \mathcal{A}(x, t, u_n, \dots, D^{2m-2} u_n) | D^{2m-2} u_n |^q D^{2m} u_n, w_k \rangle = \langle h, w_k \rangle, \\ k=1, 2, \dots, n. \quad (15)$$

Эта система имеет решение, причем, в силу полученных ниже оценок, в полном интервале  $[0, T]$ .

Стандартно получим априорную оценку

$$\forall t \in [0, T] \max \langle D^m u_n, D^m u_n \rangle + [ |D^{2m-2} u_n|^q D^{2m} u_n, D^{2m} u_n ] \leq C. \quad (16)$$

Далее, используя неравенства, полученные в п. 2, доказываем (ср. (3)), что

$$\partial u_n / \partial t \text{ ограничены в } L_q(Q). \quad (17)$$

Из (16) и (17) следует

$$D^{2m-2} u_n \text{ ограничены в } \mathcal{P}_{1, s, \mu}(Q) \cap \mathcal{P}_{2, k, \nu}(Q),$$

где  $s=(\rho-1)/2$  или  $\rho/2$ , при этом  $\mu=2q$  или  $2$ ;  $k=2\rho/3$  или  $\rho$ , при этом  $v=3(\rho+2)/2(\rho+3)$  или  $\rho$  ( $\alpha=1/3$ ).

Остается показать, что предельная функция  $u(x, t)$  удовлетворяет тождеству (3). Для этого используется регуляризация (4). Первое слагаемое в моментных уравнениях (15), соответствующее этой регуляризации, слабо сходится в силу известной леммы (см. (1)). Второе слагаемое при  $\rho \geq 2$  тоже в силу следующей леммы слабо сходится (см. (7)).

**Лемма.** Пусть  $D^{2m-2}u_n(x) \rightarrow D^{2m-2}u(x)$  почти всюду в  $[0, 2\pi]$ , а  $D(|D^{2m-2}u_n|^{\beta} D^{2m-1}u_n) \rightarrow D(|D^{2m-2}u|^{\beta} D^{2m-1}u)$  слабо в  $L_{\gamma}(0, 2\pi)$ .

Тогда, если  $f(x, u_n, \dots, D^{2m-2}u_n)$  — непрерывная функция по  $D^k u$  и  $\|f(x, u_n, \dots, D^{2m-2}u_n)\|_{L_r(0, 2\pi)} \leq K$ , где  $1/r+1/\gamma \leq 1$ , то

$$f(x, u_n, \dots, D^{2m-2}u_n) D(|D^{2m-2}u_n|^{\beta} D^{2m-1}u_n) \xrightarrow{с.л.} f(x, u, \dots, D^{2m-2}u) \times \\ \times D(|D^{2m-2}u|^{\beta} D^{2m-1}u)$$

в  $L_1(0, 2\pi)$ .

При  $0 < \rho < 2$  второе слагаемое можно представить в виде

$$\langle \mathcal{A}(x, t, u_n, \dots, D^{2m-2}u_n) |D^{2m-2}u_n|^{\rho-2} D^{2m-2}u_n |D^{2m-1}u_n|^2, w_k \rangle = \\ = -\frac{1}{\alpha\rho} \langle \mathcal{A}(x, t, u_n, \dots, D^{2m-2}u_n) |D^{2m-2}u_n|^{\alpha\rho} D(|D^{2m-2}u_n|^{(1-\alpha)\rho} D^{2m-1}u_n), w_k \rangle + \\ + \frac{1}{\alpha\rho} \langle \mathcal{A}(x, t, u_n, \dots, D^{2m-2}u_n) D(|D^{2m-2}u_n|^{\rho} D^{2m-1}u_n), w_k \rangle, 0 < \alpha < 1/2,$$

из которого также в силу леммы следует слабая сходимость.

Далее, переходим к пределу в (15). Так как  $\partial u_n / \partial t$  ограничены в  $L_q(Q)$ , то можно считать, что  $\partial u_n / \partial t \rightarrow \partial u / \partial t$  в  $L_q(Q)$ . Переходя к пределу, для любого фиксированного  $k$  получим

$$(-1)^m \langle \frac{\partial u}{\partial t}, w_k \rangle + \langle \mathcal{A}(x, t, u, \dots, D^{2m-2}u) |D^{2m-2}u|^{\rho} D^{2m}u, w_k \rangle = \langle h, w_k \rangle,$$

откуда немедленно получаем, что имеет место равенство (3).

**З а м е ч а н и е.** Имеет место аналогичная теорема для более общих уравнений

$$(-1)^m \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}(x, t, u, \dots, D^{2m-2}u) |D^{2m-2}u|^{\rho} D^{2m}u + \\ + B(x, t, u, \dots, D^{2m-2}u) |D^{2m-2}u|^{\rho} D^{2m-1}u + C(x, t, u, \dots, D^{2m-2}u) = h,$$

где  $|B(x, t, \xi)| \leq b < a_0$ ,  $|C(x, t, \xi)| \leq M \sum_{\eta=0}^{2m-2} |\xi_{\eta}|^{\rho_{\eta}}$ ,  $0 \leq \rho_{\eta} \leq \rho$ , и удовлетворяют условию Каратеодори.

Московский энергетический институт

Поступило  
28 XI 1974

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> Ю. А. Дубинский, Матем. сб., 64 (106) (1964). <sup>2</sup> Ю. А. Дубинский, Там же, 67 (109) (1965). <sup>3</sup> Ж.-Л. Лионс, Некоторые методы решений нелинейных краевых задач, М., 1972. <sup>4</sup> О. А. Олейник, УМН, т. 23, № 3 (1968). <sup>5</sup> В. Вальтер, Математика, т. 15, № 6 (1971). <sup>6</sup> Д. А. Силасев, УМН, т. 28, № 2 (1970). <sup>7</sup> К. Н. Солганов, Тр. МЭИ, № 201 (1974).