Доклады Академии наук СССР
1975. Том 222, № 2

УДК 519.214.9 *МАТЕМАТИКА*

С. Б. ШЛОСМАН

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ НА КОМПАКТНЫХ ГРУППАХ ЛИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 9 XII 1974)

В последнее время вызывает большой интерес изучение предельного поведения композиций случайных элементов на топологических группах. Для бикомпактных групп вид этого распределения в случае независимых одинаково распределенных случайных величин найден в работах Кавады и Ито ([1]), Урбаника ([2]) и Клосса ([3], [4]).

Оказалось, что предельными распределениями могут быть только меры Хаара подгрупп.

В работе ([1]) были указаны достаточные условия, при которых закон распределения композиции неодинаково распределенных случайных элементов слабо сходится к мере Хаара группы. Эти условия были улучшены Клоссом, которым была доказана следующая

Теорема ([4]). *Пусть H — бикомпактная связная топологическая группа, m_H — ее мера Хаара. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_i, \ldots$ — последовательность случайных независимых элементов группы H, и $\mu_1, \ldots, \mu_i, \ldots$ — их распределения вероятностей, т. е.*

$$\mu_i(E) = \mathscr{P}r\{\xi_i \in E \subset H - \text{борелевское множество}\}.$$

Пусть существуют числа $\varepsilon > 0$ и $\eta < 1$ такие, что для любого $E \subset H$ и для любого i из $m_H(E) < \varepsilon$ следует $\mu_i(E) < \eta$.

Тогда последовательность сверток $\nu_n = \mu_1 * \ldots * \mu_n$ слабо сходится к мере Хаара m_H $(m_H(H) = 1)$.

Напомним, что свертка мер определяется равенством

$$(\mu * \nu)(E) = \int_H \mu(Eg^{-1})\, d\nu(g).$$

Слабая сходимость $\nu_n \to m_H$ означает, что для любой непрерывной функции $f(h)$ на группе H имеет место равенство

$$\lim_{n \to \infty} \int_H f(h)\, d\nu_n(h) = \int_H f(h)\, dm_H(h).$$

В настоящей заметке излагаются результаты, связанные с сильной сходимостью сверток мер. Сильная сходимость определяется так.

Пусть τ — конечная знакопеременная мера (заряд) на пространстве X. Разложением Хана τ называется представление τ в виде разности двух неотрицательных мер $\tau = \tau^+ - \tau^-$, причем должно существовать измеримое подмножество $A^+ \subset X$ такое, что

$$\tau^-(A^+) = \tau^+(X \setminus A^+) = 0.$$

Разложение Хана всегда существует.

Положим

$$\|\tau\| = \tau^+(A^+) + \tau^-(X \setminus A^+).$$

Скажем, что последовательность ν_n сильно сходится к мере ν, если $\|\nu_n-\nu\|\to 0$ при $n\to\infty$. (В теории вероятностей $\|\nu_n-\nu\|$ называется расстоянием по вариации).

Пусть μ — конечная неотрицательная мера на компактной топологической группе H. Предположим, что μ абсолютно непрерывна относительно меры Хаара m_H, $m_H(H)=1$, а $d\mu/dm_H$ есть производная Радона — Никодима. На положительной полуоси определим функцию

$$M_\mu(x)=m_H\left\{h\in H;\ \frac{d\mu}{dm_H}(h)\geqslant x\right\}.$$

Положим теперь

$$S(\mu)=\int^{\infty}[M_\mu(x)]^3\,dx;$$

так как

$$M_\mu(x)\leqslant\min\left\{1,\frac{\mu(H)}{x}\right\},$$

то интеграл $S(\mu)$ всегда сходится.

Теперь можно сформулировать основную теорему данной работы.

Теорема 1. *Пусть $\xi_1,\ldots,\xi_i,\ldots$ — независимые случайные элементы бикомпактной связной топологической группы H. Пусть $\mu_1,\ldots,\mu_i,\ldots$ — их распределения вероятностей. Пусть для всех i зафиксировано разложение $\mu_i=\gamma_i+\delta_i$, где γ_i и δ_i — неотрицательные меры на H, причем меры γ_i абсолютно непрерывны по мере Хаара m_H.*

Если а) *группа H есть (конечномерная) группа Ли,* б) *ряд $\sum\limits_i S(\mu_i)$ расходится, то последовательность мер $\nu_i=\mu_1*\ldots*\mu_i$ сильно сходится к мере m_H.*

Замечания. 1) Хотя техника доказательств существенно опирается на существование структуры группы Ли на группе H, кажется правдоподобным, что приведенная выше теорема остается справедливой и без требования а).

2) Сходимость называется усиленной, если она сохраняется после изменения законов распределения конечного числа случайных элементов $\xi_{i_1},\ldots,\xi_{i_k}$, $k=0,1,\ldots$ Из условия б) следует, что сходимость, вытекающая из нашей теоремы, является усиленной.

3) Пусть $\nu_n=\mu_1*\ldots*\mu_n=\tilde{\nu}_n+\delta_n$, где $\tilde{\nu}_n$ и δ_n — неотрицательные меры на группе H, а $\tilde{\nu}_n$ абсолютно непрерывна по мере Хаара m_H. Из замечания 2) легко вытекает, что для каждого n можно так выбрать меры $\tilde{\nu}_n$ и их плотности $\tilde{p}_n$ (плотности можно варьировать на множестве меры нуль), чтобы последовательность функций $\tilde{p}_n$ равномерно сходилась к функции, тождественно равной единице.

4) Величина $S(\mu)$ является хорошей «мерой разброса» меры μ. Например, пусть $M(x)$ — функция, удовлетворяющая некоторым естественным условиям (перечисляем ниже условия 1—3), а μ — вероятностная мера на отрезке такая, что $M_\mu(x)=M(x)$. Если ξ — случайная величина с законом распределения μ, то для ее дисперсии имеет место оценка

$$D\xi\geqslant{}^1/_{12}\int\limits_0^\infty M^3(x)\,dx={}^1/_{12}S,$$

причем ее нельзя улучшить.

5) Предположения нашей теоремы являются более слабыми, а утверждения — более сильными, чем теорема Клосса в применении к группам Ли.

Развитая в статье техника применима также к случаю схем серий и к случаю зависимых случайных элементов.

В наших терминах улучшить теорему 1 нельзя. Именно, имеет место

Теорема 2. *Пусть монотонно убывающие функции $M_i(x)$ на $[0, \infty)$ таковы, что*

1) $M_i(x) \geqslant 0$;
2) $M_i(x)$ *непрерывны слева*;
3) $\int\limits_0^\infty M_i(x)\,dx = 1$;
4) $M_i(1) < 1$.

Пусть G — произвольная компактная связная группа Ли, для которой существует нетривиальный гомоморфизм в окружность.

Если ряд

$$\sum_i \int\limits_0^\infty M_i^3(x)\,dx$$

сходится, то найдется последовательность вероятностных мер $\mu_1, \ldots, \mu_i, \ldots$ на группе G таких, что $M_{\mu_i}(x) = M_i(x)$, причем последовательность $\nu_i = \mu_1 * \ldots * \mu_i$ не сходится к мере m_G даже в слабом смысле.

По-видимому, такая теорема справедлива для произвольных групп Ли.

Важным шагом в доказательстве приведенных выше теорем является получение оценок снизу на меру Хаара произведения двух подмножеств компактной группы Ли через меры Хаара этих подмножеств.

Пусть $A, B \subset G$ — измеримые подмножества. Обозначим

$$AB = \{g \in G;\ g = ab,\ a \in A,\ b \in B\}$$

и пусть m_G есть мера Хаара G, причем $m_G(G) = 1$. Если группа G коммутативна, то имеет место оценка

$$m_G(AB) \geqslant \min\{m_G(A) + m_G(B),\ 1\}$$

(см. ([5])). В общем случае некоммутативной группы такую оценку получить не удается. Однако имеет место следующий результат:

Справедливо по крайней мере одно из утверждений:

1) $m_G(AB) \geqslant \max\{m_G(A), m_G(B)\} + m_G(A) \cdot m_G(B)$;
2) *для любого максимального тора $T \subset G$ найдется элемент $g_T \in G$ такой, что имеет место включение $g_T T \subset AB$.*

Отсюда без труда можно вывести следующее предложение:

Пусть $A_1, \ldots, A_i, \ldots$ — последовательность измеримых множеств группы G, и ряд $\sum\limits_i m_G(A_i)$ расходится.

Тогда найдется номер N такой, что выполняется равенство $\prod\limits_{i=1}^N A_i = G$.

(Это равенство нужно понимать в том смысле, что для любого элемента $g \in G$ найдется последовательность элементов $a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_i \in A$ таких, что $g = a_1 \cdot \ldots \cdot a_N$.)

Стимулирующее влияние оказала на автора статья ([6]), написанная им совместно с Р. Л. Добрушиным. Автор пользуется случаем выразить Р. Л. Добрушину признательность за ценные обсуждения в процессе написания настоящей работы.

Институт проблем передачи информации
Академии наук СССР
Москва

Поступило
28 XI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *K. Kawada, K. Ito*, Proc. Phys. Math. Soc. Japan, v. 22, 977 (1940). [2] *K. Urbanik*. Fund. Math., v. 3, 253 (1957). [3] *Б. М. Клосс*, Теория вероятн. и ее применения, т. 4, № 3, 255 (1959). [4] *Б. М. Клосс*, Там же, т. 6, № 4, 392 (1961). [5] *Н. Бурбаки*, Интегрирование. Векторное интегрирование, мера Хаара, М., 1970. [6] *R. L. Dobrushin, S. B. Shlosman*, Comm. in Math. Phys., in press.