Доклады Академии наук СССР
1975. Том 222, № 3

УДК 533.6.011.72 *ФИЗИКА*

В. А. БЕЛОКОНЬ

СЖАТИЕ СОВЕРШЕННОГО ГАЗА МНОГОКРАТНО ОТРАЖЕННЫМИ УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ

(Представлено академиком Р. З. Сагдеевым 26 VIII 1974)

Одномерный поршень, мгновенно ускоренный до постоянной скорости, порождает в идеальной жидкости разрыв; между поршнем и разрывом среда однородна и неподвижна относительно поршня. Следующее внезапное ускорение поршня дает новую ступенчатую волну, с постоянной скоростью догоняющую предыдущую. Цуг таких волн получается при многократном ускорении поршня с кусочно-постоянной скоростью, а встреча цуга со стенкой или таким же цугом дает многократные отражения. Подобные неизоэнтропические течения (рис. 1) допускают аналитическое рассмотрение со строгим обобщением инвариантов Римана для одномерных и приближенным для стационарных двумерных течений.

Пусть в процессе монотонного сжатия среды скачками, способными менять скорость течения только на одну и ту же величину Δu, акты «догона» не успевают совершаться, т. е. взаимодействуют только одинаковые скачки, исключены контактные разрывы и волны разрежения, параметры среды между скачками однородны, ее скорость квантована. Если цуг скачков бесконечен, то бесконечно и уплотнение. Множество состояний, порождаемое такими скачками, не более многообразно, чем последовательность, получаемая однократно ускоренным поршнем.

Если разрывы локально стационарны и адиабатичны: $(P_k+P_{k-1})\Delta V=2\Delta E$, то в среде $2E=fPV\equiv 2PV/(\gamma-1)$ для любой пары скачков, последовательно меняющих скорость кусочно-однородной среды на Δu каждый, имеем прирост локальной скорости скачка $D_k-D_{k-1}=(1/f)\Delta u$. Если в начальном цуге первый скачок идет по неподвижному ($u_0=0$) центральному состоянию, то на периферии он встречает k-ое состояние среды, движущейся со скоростью $u_k=k\Delta u$, приобретая $D_k=D_0+(k/f)\Delta u$, т. е. перед скачком сохраняется неизоэнтропический аналог инварианта Римана $\mathrm{B}_-\equiv fD_k-u_k\equiv 2D_k/(\gamma-1)-u_k\to 2a/(\gamma-1)-u$ при $\mathrm{M}_k\to 1$. Скачок, падающий к центру, встречает тормозящееся до $u_m=0$ течение, ускоряясь до $D_m=D_k+u_k/f=D_0+u_0/f$, откуда вдоль его фронта сохраняется другой инвариант $\mathrm{B}_+\equiv fD_k+u_k$. При $\gamma=3$ или $f=1$ лабораторная скорость скачка сохраняется: $D\pm u=\pm dX/dt=\mathrm{B}_\pm$. Для $\gamma=-1$ или $f=-1$ это тривиально, ибо скачок изоэнтропичен. Вообще $D_k-u_k=D_0-k(1-1/f)\Delta u$, т. е. при $\gamma<3$ и $k\to\infty$ отраженные разрывы снесены течением к центру. Если $(D/a)_0\equiv\mathrm{M}_0=\infty$, $D_0=(1+1/f)\Delta u$, то $(dX/dt)_-=(1-1/f)[(f+1)/(f-1)-k]\Delta u<0$ при $k>(f+1)/(f-1)$.

Далее, при таком M_0 имеем скачки $V_0/V_1=1+f$, $V_1/V_2=1+f/2$, $V_2/V_3=1+f/3$. Это оправдывает простейшую гипотезу $V_{k-1}/V_k=1+f/k$, подтверждаемую для любых $k\geqslant 1$. Отсюда $V_0/V_k=(k+f)!/f!k!$ при $k=(f+1)(D_k/D_0-1)=(f+1)(u_k/fD_0)$, а также $P_k/P_1=(k+f+1)!/(k-1)!(f+2)!$

Случай $\mathrm{M}_0=\infty$ содержит решения с начальными $k_0>0$: $E_k/E_{k0}=(D_kM_{k0}/D_{k0}\mathrm{M}_k)^2$, откуда в центре достигается

$$\eta(m\gg k_0)\equiv V_{k0}/V_m=\{(u_{k0}/fD_{k0}+1)^2(\mathrm{M}_{k0}/\mathrm{M}_m)^2\exp[-\sigma(k_0,\ m)]\}^{f/2},$$

т. е. $\eta(m, M_{k0}\approx1)\approx\{u_{k0}/fa_{k0}+1\}^f$; $\eta(m, M_{k0}\gg f^{1/2})\approx\{u_{k0}/fD_{k0}\}^f$, при $u_{k0}=u^{\max}$ крайнего слоя и

$$\sigma(q,r)\equiv\int_q^r\frac{T}{E}dS=\ln\left\{\frac{E_r}{E_q}\left(\frac{V_r}{V_q}\right)^{2/f}\right\}\equiv(\gamma_B-\gamma)\ln\frac{V_r}{V_q},$$

поскольку течение сводится к переходам между состояниями равновесными. Для серии скачков $\sigma(1,\ k\gg f)\approx\ln\{[(f+1)!]^{2/f}/(2+f)\}$, $\sigma(1,\ k\ll f)\approx\ln k\approx\approx\ln\ln(V_0/V_k)$; для одного скачка $\sigma(k,\ k+1\gg f)\approx\ln\{1+(f+1)(f+2)/3k^3\}\approx\approx(f+2)(M_k^2-1)^3/3(f+1)^2\ll1$, $\sigma(M\gg f^{1/2})\approx2\ln M$. Простым вариантом полученного решения является адиабатическое сжатие поршнем, который мгновенно ускорен до неизменной скорости Δu к неподвижной стенке, удаленной вначале на L_0; он задает независимо от уравнения состояния эволюцию $V(t)\equiv V_0\{1-t\Delta u/L_0\}=V(k,\ f)$. При произвольном первичном скачке получается $M_k=1/\{1-1/[1/(1-1/M_0^2)+k/(f+1)]\}^{1/2}$; для $k\gg f$ решение близко к изоэнтропическому: скачки к очередному равновесному состоянию квазистатичны (они успевают ликвидировать нарушение равновесия изменением объема); режим $k\lessdot f$ явно необратим ([1], [8], [10]): скорость D установления равновесия почти равна скорости Δu его нарушения: $M_k^2=1+(f+1)/k$;

$$D_k=\{1+(k+1)f\}\Delta u\approx a(k\gg f)\gg\Delta u=(1-1/M_k^2)D_k/(1+1/f);$$
$$-(\Delta E/\Delta V)_k=(P_{k+1}+P_k)/2=P_k\{1+(f+2)/2k\}\approx P(k\gg f)\equiv-(\partial E/\partial V)_s.$$

Полный путь скачка между поршнем и стенкой ограничен сверху при $f>1$: $\mathscr{L}\sim L_0\zeta(f)$, но бесконечен $\mathscr{L}\sim L_0\ln k$ при $f=1$ как при сжатии «газа одной молекулы».

Далее, согласно аналогии ([3], [10]) между нестационарными одномерными и двумерными стационарными течениями, одномерному сжатию соответствует втекание в сужающийся канал, взаимное сжатие косо соударяющихся струй и т. п. Пусть плоский канал образован стенками с такими последовательными изломами на фиксированный угол χ, что взаимодействуют скачки только одинаковые, меняющие направление течения только на χ. Если θ_k — угол между скоростью среды в зоне $k+1$ и скачком $k\to k+1$, то скачок встречает линию тока в k под углом $\alpha_k=\theta_k+\chi$; $\operatorname{tg}\alpha_k/\operatorname{tg}\theta_k=V_{k-1}/V_k$. При скользящих отражениях скачков слабого типа $1\gg\alpha_k>\theta_k$, $1<V_k/V_{k+1}\approx\alpha_k/\theta_k\equiv\equiv1+\chi/\theta_k$, т. е. $\theta_{k+1}/\theta_k=(V_k/V_{k+1}-1)/(V_{k-1}/V_k-1)$. При гиперзвуке на входе $M_0\gg\alpha_0M_0\cong M_0\sin\alpha_0\equiv M_0^{\perp}\gg f^{1/2}$, $M_0\gg f^{1/2}/\chi$; $\theta_k/\theta_{k-1}=1+1/k$, $1\gg\theta_k=(k+1)\chi/f$, $\alpha_k\approx\chi\{1+(k+1)/f\}$. Отсюда получаем плоские неизоэнтропические инварианты

$$\mathfrak{B}_-\equiv f\alpha_k-k\chi\equiv f\alpha_k-\chi_k=(f+1)\chi=f\alpha_0;\quad \mathfrak{B}_+\equiv f\alpha_m+\chi_m\equiv f\alpha_m+(k_0-m)\chi.$$

Поскольку скачок имеет наклон $\alpha_k\pm\chi_k=\mathrm{const}-(f-1)\alpha_k$, то скачки прямолинейны при $\gamma=3$. При $M_{k0}^{\perp}\approx1$, но $M_{k0}\approx1/\alpha_k\approx f/k_0\chi\gg1$ получаем обратимый гиперзвуковой диффузор Буземанна ([3]).

Свойства полученного решения проиллюстрируем для газа Ферми — Дирака ([1], [2], [4]), энтропия которого $S/Nk\equiv\mathfrak{S}(T/T_F)\approx(\pi^2/5)(NkT/PV)\approx(\pi^2/2)\cdot(T/T_F)\lessdot1$ — в приближении сильного вырождения: $E\equiv3PV/2\approx(NkT/2)\cdot(3\pi^2/5)(Nk/S)[1+(5/3\pi^2)(S/Nk)^2]$. Тогда скачок в полностью вырожденном ($S_0=0$) газе повышает энтропию на $\Delta S/Nk=(\pi/2)\{(3/5)[[(5M^2-1)/4]\cdot[(1+3/M^2)/4]^{5/3}-1]\}^{1/2}\lessdot1$ при $M\lessdot2$, т. е. решение с интенсивным первичным скачком, нарушающим условие сильного вырождения, не подходит, но работает, начиная с $k_0\gtrsim1$ или 2. Кстати, адиабатическое сжатие приближает среду к идеальности, но не к вырожденности, поскольку энтропия однозначно задает меру вырождения и из состояния невырожденного вырожденное адиабатически недостижимо (либо сохраняется, либо нарушается). Скачки умеренной интенсивности здесь способны к сильному разогреву при малом абсолютном повышении энтропии: $T_k/T_{k-1}=(S_k/S_{k-1})(V_{k-1}/V_k)^{2/3}\gg\gg(V_{k-1}/V_k)^{2/3}\gtrsim1$.

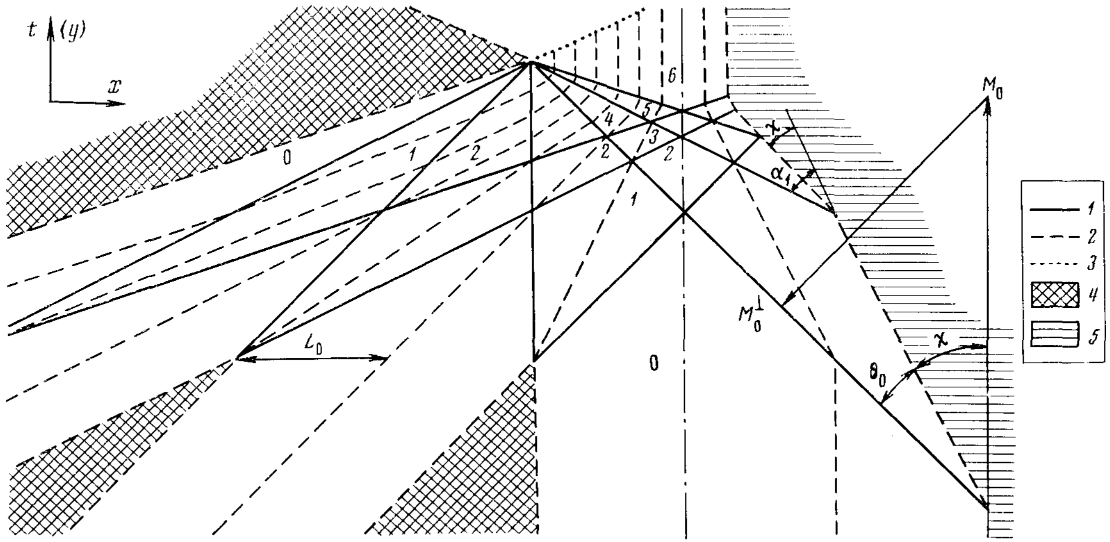

Рис. 1. Сжатие одновременным соударением слоев (струй) или поршнем (диффузором). *1* — скачки, *2* — частицы среды, *3* — фронт разрежения, *4* — вакуум, *5* — стенка. $\gamma=3$, $M_0=\infty$. 0–6 – номера состояний

В силу энтропийной нелинейности $\sigma=\Delta \ln[1+(5/3\pi^2)(C/Nk)^2]$, заданный скачок величин P, V (в одной ударной волне или многих) из состояния большей энтропии приводит к большей итоговой энтропии, но с меньшим ее приростом $S_{ak}-S_a<S_{bk}-S_b$, чем из состояния меньшей энтропии $S_b<S_a$. При большей начальной температуре получается и большее ее приращение. В слабых $(S(k_0\gg f)=0)$ скачках $\Delta S/Nk\approx 2\pi/k^{3/2}=(\pi/4)(\mathrm{M}^2-1)^{3/2}$. Если лидирует умеренный ($k_0=1$; $\mathrm{M}_1=5^{1/2}$) скачок, то $S_2-S_1=S_2=1{,}34\,Nk$, а полный рост энтропии бесконечного сжатия равен $1{,}98\,Nk$, тогда как в классическом газе $\sigma=\Delta S/(f/2)Nk$, $S_2-S_1\approx 0{,}4\,Nk$, $S_\infty-S_1\approx 0{,}8\,Nk$ при $f=3$, а при $f\gg k$ $(S_k-S_1)/2Nk\approx f\ln k\approx f\ln\ln(V_1/V_k)$; в ультрарелятивистском $S_1/S_0\cong 0{,}158\,\mathrm{M}_0^{1,5}$, но $\Delta S(k_0\gg 6)\sim(\mathrm{M}^2-1)^3$, как и в нерелятивистском классическом газе.

При изоэнтропических (здесь $k\gg f$) процессах работа сжатия минимальна для локально-равновесной среды ([1, 10]), а получаемая при локально-равновесном изоэнтропическом расширении — максимальна (полностью возвратима), аналогично эффекту ликвидации волнового сопротивления для биплана Буземанна ([3]). Более реалистичен не такой вечный двигатель, а процесс совершения избыточной работы за счет энерговыделения (например, дозвуковым горением) уплотненной средой при начальном расширении. Найденные течения сопоставимы с «точечной фокусировкой» скачков ([5, 14]) или звуковых волн ([11]), т. е. с оптимизированно быстрым изоэнтропическим сжатием центрированной волной ([7, 11]) или цугом «равномаховых» (по Осватичу ([6, 14])) скачков, когда финальная неизоэнтропичность отраженного скачка (с тепловыделением за фронтом) дает потери, очевидные при исчезающем тепловыделении: необратимый скачок остается. Применимость постановки рассмотренной задачи ограничена уширением скачка по мере его ослабления ([9, 10]): даже в разреженном газе твердых шаров уменьшение пробега из-за сжатия не компенсирует уширения скачка; предположение о разрывах более обосновано, если сжатие достигается скачками с неизменным М. О применимости концепции внешнего поршня см. ([11–14]).

Автор признателен Л. Вуду, В. С. Имшеннику, А. С. Компанейцу, И. В. Немчинову, Г. И. Покровскому, А. Х. Рахматуллиной, Р. З. Сагдееву, К. П. Станюковичу, В. В. Сычеву (ЦАГИ), Р. В. Хохлову за ценные замечания, а также С. И. Анисимову и М. И. Пергаменту за дискуссию на семинаре в Институте ядерной физики Московского университета, 1973 г.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
29 XII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *R. C. Tolman,* The Principles of Statistical Mechanics, 1938. [2] *E. Fermi,* Molecule und Kristalle, 1938. [3] *R. Sauer,* Ecoulement des Fluides Compressibles, Paris, 1951. [4] *J. Gilvary,* J. Appl. Phys., v. 27, 1467 (1956). [5] *В. А. Белоконь,* Природа, № 12, 83 (1956). [6] *R. Hermann,* Supersonic Inlet Diffusers, 1957. [7] *R. von Mises,* Mathematical Theory of Compressible Flow, N. Y., 1958. [8] *В. А. Белоконь,* Тез. 4 совещ. МГД, Рига, 1964. [9] *В. А. Белоконь,* Журн. пр. мех. тех. физ., № 6, 125 (1965). [10] *В. А. Белоконь,* Препринт и дисс. Ин-та прикл. матем., 1967. [11] *J. Nuckolls, L. Wood et al.,* Nature, v. 239, 139 (1972). [12] *Р. З. Сагдеев,* УФН, т. 110 (1973). [13] *A. Hertzberg,* AIAA Pap., № 73-258 (1973). [14] *K. A. Brueckner, S. Jorna,* Rev. Mod. Phys., in press.