

С. Н. ЧЕРНИКОВ

ОБОБЩЕННЫЕ СВЕРХРАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ С СИСТЕМАМИ ДОПОЛНЯЕМЫХ АБЕЛЕВЫХ ПОДГРУПП

(Представлено академиком В. М. Глушковым 14 II 1972)

В работах автора (^{1, 2}) выделены некоторые классы групп с заданными системами дополняемых подгрупп и, в частности, класс групп, в которых дополняемы все нормальные делители (нормализуемые группы), и класс групп, в которых дополняемы все абелевы подгруппы. Класс нормализуемых групп весьма широк (он содержит, например, все простые группы), и потому в отмеченных работах они изучаются при некоторых дополнительных ограничениях и, в частности, при ограничении, которое равносильно предположению о существовании возрастающего инвариантного ряда с локально циклическими факторами. Группы с таким рядом естественно называть обобщенными сверхразрешимыми группами; учитывая, что они входят в класс групп, обладающих возрастающим инвариантным рядом с абелевыми факторами (RJ^* -группы), будем краткости ради называть их SRJ^* -группами.

В работе (²) показано, что нормализуемые SKJ^* -группы вполне факторизуемы (так называются группы, в которых дополняемы все подгруппы). Из известного описания вполне факторизуемых групп (см. (^{3, 4})) вытекает, в частности, что вполне факторизуемые группы являются SRJ^* -группами. Следовательно, класс SRJ^* -групп, в которых дополняемы все нормальные делители, не отличается от класса вполне факторизуемых групп. Так как произвольные группы, в которых дополняемы все абелевы подгруппы, вполне факторизуемы (это вытекает из результатов работы (²)), то не отличается от него и класс SRJ^* -групп, в которых дополняемы все абелевы подгруппы. Здесь естественно возникает мысль так сузить рассматриваемые системы дополняемых подгрупп, чтобы получились более широкие классы факторизуемых SRJ^* -групп, чем класс вполне факторизуемых групп. В связи с этим в настоящей статье выделяются следующие системы дополняемых подгрупп:

- 1) система всех абелевых нормальных делителей;
- 2) система бесконечных абелевых нормальных делителей (в случае бесконечных групп);
- 3) система всех бесконечных абелевых подгрупп (в случае бесконечных групп);
- 4) система локально циклических нормальных делителей.

Из формулируемых ниже результатов вытекает, что SRJ^* -группы с любой из выделенных здесь систем дополняемых подгрупп составляют класс групп, более широкий, чем класс вполне факторизуемых групп, и что среди определяемых этими системами четырех классов SRJ^* -групп совпадающих нет.

1. Лемма 1.1. Если в SRJ^* -группе $\mathfrak{G}$ дополняемы все (абелевы) нормальные делители, содержащиеся в некотором ее нетривиальном абелевом нормальном делителе $\mathfrak{A}$, то последний разлагается в прямое произведение инвариантных в $\mathfrak{G}$ и простых относительно $\mathfrak{G}$ подгрупп, произвольная из которых либо является циклической группой простого порядка, либо изоморфна аддитивной группе рациональных чисел.

Нетривиальную подгруппу $\mathfrak{H}$ произвольной группы $\mathfrak{G}$ будем называть простой относительно подгруппы $\mathfrak{E}$ из $\mathfrak{G}$ (в частности, простой относительно $\mathfrak{G}$), если подгруппа $\mathfrak{H}$ не содержит нетривиальных собственных подгрупп, инвариантных относительно $\mathfrak{E}$ (относительно $\mathfrak{G}$). Тривиальной подгруппой, тривиальным нормальным делителем произвольной группы $\mathfrak{G}$ называется ее подгруппа, не содержащая отличных от единицы элементов.

Теорема 1.1. *Нетривиальные SRJ^* -группы, в которых дополняемы все абелевы нормальные делители, и только такие группы представимы в виде полупрямого произведения $\mathfrak{A} \ltimes \mathfrak{B}$ двух абелевых подгрупп $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, удовлетворяющих следующим условиям:*

- 1) *централизатор подгруппы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ тривиален;*
- 2) *подгруппа $\mathfrak{A}$ разлагается в прямое произведение таких инвариантных относительно $\mathfrak{B}$ подгрупп, произвольная из которых проста относительно $\mathfrak{B}$ и является либо циклической группой простого порядка, либо группой, изоморфной аддитивной группе рациональных чисел.*

Примечание. Нетрудно убедиться, что множитель $\mathfrak{A}$ здесь является таким абелевым нормальным делителем SRJ^* -группы с дополняемыми абелевыми нормальными делителями, который содержит каждый ее абелев нормальный делитель.

Следствие 1.1. *В нетривиальной группе, обладающей возрастающим инвариантным рядом с циклическими факторами, тогда и только тогда дополняемы все абелевы нормальные делители, когда она представима в виде полупрямого произведения $\mathfrak{A} \ltimes \mathfrak{B}$ двух таких абелевых подгрупп $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, что подгруппа $\mathfrak{A}$ имеет тривиальный централизатор в подгруппе $\mathfrak{B}$ и разлагается в прямое произведение инвариантных относительно $\mathfrak{B}$ циклических групп простых порядков.*

Следствие 1.2. *SRJ^* -группа, в которой дополняемы все абелевы нормальные делители, тогда и только тогда вполне факторизуема, когда вполне факторизуема ее фактор-группа по максимальному абелеву нормальному делителю.*

Отсюда вытекает следующее известное

Предложение (см. (2)). *Если в SRJ^* -группе дополняемы все нормальные делители, то она вполне факторизуема.*

Следствие 1.3. *Если SRJ^* -группа, в которой дополняемы все абелевы нормальные делители, не содержит нормальных делителей, изоморфных аддитивной группе рациональных чисел, и имеет инвариантные нетривиальные абелевы p -подгруппы только для конечного множества простых чисел p , то она не содержит элементов бесконечного порядка.*

Следствие 1.4. *Конечно порожденная SRJ^* -группа, в которой дополняемы все абелевы нормальные делители, конечна.*

Теорема 1.2. *Для того чтобы в неабелевой SKJ^* -группе $\mathfrak{G}$ были дополняемы все абелевы нормальные делители, необходимы и достаточны следующие условия:*

- 1) *центр и коммутант группы $\mathfrak{G}$ дополняемы в $\mathfrak{G}$;*
- 2) *центр вполне факторизуем;*
- 3) *коммутант разлагается в прямое произведение инвариантных в $\mathfrak{G}$ и простых относительно $\mathfrak{G}$ подгрупп, произвольная из которых является либо циклической группой простого порядка, либо изоморфна аддитивной группе рациональных чисел.*

Необходимость этих условий устанавливается леммой 1.1, достаточность вытекает из теоремы 1.1.

Для неабелевой SRJ^* -группы, обладающей возрастающим инвариантным рядом с циклическими факторами, эти условия упрощаются. Условия 1) и 2) переходят в условие

а) *центр и коммутант группы $\mathfrak{G}$ вполне факторизуемы и дополняемы в $\mathfrak{G}$;*

условие 3) — в условие

б) коммутант-группы $\mathfrak{G}$ разлагается в прямое произведение инвариантных в $\mathfrak{G}$ циклических групп простых порядков.

2. Теорема 2.1. Для того чтобы в бесконечной SRJ^* -группе $\mathfrak{G}$ были дополняемыми все бесконечные абелевы нормальные делители, но не был дополняемым хотя бы один конечный абелев нормальный делитель, необходимо и достаточно, чтобы она имела такой дополняемый бесконечный абелев нормальный делитель, который совпадает со своим централизатором в $\mathfrak{G}$ и разлагается в прямое произведение конечного числа инвариантных в $\mathfrak{G}$ циклических подгрупп простых порядков и такой бесконечной инвариантной в $\mathfrak{G}$ примарной абелевой подгруппы, не содержащей инвариантных в $\mathfrak{G}$ собственных бесконечных подгрупп, которая является либо элементарной абелевой группой, либо прямым произведением конечного числа квазициклических групп.

Следствие 2.1. Для того чтобы в бесконечной SRJ^* -группе $\mathfrak{G}$ были дополняемыми все бесконечные нормальные делители, но не был дополняемым хотя бы один конечный нормальный делитель, необходимо и достаточно, чтобы она имела такой дополняемый бесконечный абелев нормальный делитель, который совпадает со своим централизатором в $\mathfrak{G}$, имеет вполне факторизуемое дополнение в $\mathfrak{G}$ и разлагается в прямое произведение конечного числа инвариантных в $\mathfrak{G}$ циклических групп простых порядков и такой бесконечной инвариантной в $\mathfrak{G}$ примарной абелевой подгруппы $\mathfrak{P}$, не содержащей инвариантных в $\mathfrak{G}$ собственных бесконечных подгрупп, которая является либо элементарной абелевой группой, либо прямым произведением конечного числа квазициклических групп. Во втором случае подгруппа $\mathfrak{P}$ имеет конечный индекс в $\mathfrak{G}$.

С помощью теорем 1,1 и 2,1 получается следующее предложение.

Теорема 2.2. Для того чтобы в бесконечной SRJ^* -группе $\mathfrak{G}$ были дополняемыми все бесконечные абелевы подгруппы, но не была дополняемой хотя бы одна конечная абелева подгруппа, необходимо и достаточно, чтобы группа $\mathfrak{G}$ была представимой в виде полупрямого произведения $\mathfrak{A} \ltimes \mathfrak{B}$ двух абелевых подгрупп $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, удовлетворяющих следующим требованиям:

1) централизатор подгруппы $\mathfrak{A}$ в $\mathfrak{B}$ тривиален;

2) подгруппа $\mathfrak{A}$ разлагается либо в прямое произведение бесконечного множества инвариантных относительно $\mathfrak{B}$ циклических групп простых порядков, либо в прямое произведение конечного множества таких групп и инвариантной относительно $\mathfrak{B}$ квазициклической группы;

3) подгруппа $\mathfrak{B}$ конечна и удовлетворяет следующим условиям:

3а) если подгруппа $\mathfrak{A}$ не содержит квазициклических подгрупп, то подгруппа $\mathfrak{B}$ разлагается в прямое произведение вполне факторизуемой группы и циклической группы, силовские подгруппы которой имеют непростые порядки и не содержат отличных от единицы элементов с бесконечным централизатором в $\mathfrak{A}$;

3б) если подгруппа $\mathfrak{A}$ содержит квазициклическую подгруппу, то группа $\mathfrak{B}$ либо вполне факторизуема, либо удовлетворяет условию 3а).

3. Лемма 3.1. В произвольной SRJ^* -группе $\mathfrak{G}$, в которой дополняемы все локально циклические нормальные делители, каждый нетривиальный абелев нормальный делитель, обладающий конечным рядом подгрупп с локально циклическими факторами, дополняем и разлагается в прямое произведение инвариантных в $\mathfrak{G}$ и простых относительно $\mathfrak{G}$ подгрупп, произвольная из которых либо имеет простой порядок, либо изоморфна аддитивной группе рациональных чисел.

Теорема 3.1. Если в группе, обладающей конечным инвариантным рядом с локально циклическими факторами, дополняемы все локально циклические нормальные делители, то в ней дополняемы все абелевы нормальные делители.

Следствие 3.1. Если в сверхразрешимой группе дополняемы циклические нормальные делители, то в ней дополняемы и все абелевы нормальные делители.

Теорема 3,2. Если в группе $\mathfrak{G}$, обладающей конечным инвариантным рядом с локально циклическими факторами, дополняемы все абелевы нормальные делители, то она не содержит подгрупп, изоморфных аддитивной группе рациональных чисел.

Лемма 4,1. Если для некоторого простого числа p , делящего порядок коммутанта $\mathfrak{G}'$ конечной сверхразрешимой группы $\mathfrak{G}$, ее силовские p -подгруппы абелевы, а силовская p -подгруппа $\mathfrak{G}_p'$ коммутанта $\mathfrak{G}'$ элементарная абелева, то подгруппа $\mathfrak{G}_p'$ разлагается в прямое произведение инвариантных в $\mathfrak{G}$ циклических групп порядка p .

Лемма 4,2. Если для некоторого простого числа p , делящего порядок коммутанта $\mathfrak{G}'$ конечной сверхразрешимой группы $\mathfrak{G}$, ее силовская p -подгруппа $\mathfrak{G}_p$ абелева, а силовская p -подгруппа $\mathfrak{G}_p'$ коммутанта $\mathfrak{G}'$ элементарная абелева, то подгруппа $\mathfrak{G}_p'$ является сервантной подгруппой группы $\mathfrak{G}_p$.

Лемма 4,3. Если для каждого простого числа p , делящего порядок коммутанта $\mathfrak{G}'$ конечной сверхразрешимой группы $\mathfrak{G}$, ее силовские p -подгруппы абелевы, а силовская p -подгруппа коммутанта $\mathfrak{G}'$ элементарная абелева, то коммутант $\mathfrak{G}'$ дополняем в $\mathfrak{G}$.

Теорема 4,1. Если в сверхразрешимой конечной группе $\mathfrak{G}$ дополняемы все абелевы нормальные делители, то ее силовские p -подгруппы для всех простых делителей p ее порядка абелевы. Для того чтобы в конечной сверхразрешимой группе с абелевыми силовскими p -подгруппами для всех простых чисел p , делящих ее порядок, были дополняемыми все ее абелевы нормальные делители, необходимо и достаточно, чтобы ее коммутант был вполне факторизуемой группой, а центр — вполне факторизуемой и дополняемой подгруппой.

Примечание. Пользуясь теоремой 1,1, нетрудно убедиться, что силовские p -подгруппы абелевы не только в конечных сверхразрешимых группах с дополняемыми абелевыми нормальными делителями, но и в любых SRJ^* -группах, удовлетворяющих этому условию.

Следствие 4,1. Для того чтобы в конечной сверхразрешимой группе с тривиальным центром были дополняемыми все абелевы нормальные делители, необходимо и достаточно, чтобы ее силовские p -подгруппы по всем простым числам p , делящим ее порядок, были абелевыми, а ее коммутант — вполне факторизуемой абелевой группой.

Следствие 4,2. (Теорема Ф. Холла ⁽⁵⁾). Если в конечной сверхразрешимой группе $\mathfrak{G}$ силовские p -подгруппы по всем простым числам p , делящим ее порядок, элементарные абелевы, то группа $\mathfrak{G}$ вполне факторизуема.

Институт математики
Академии наук УССР
Киев

Поступило
8 II 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Н. Черпиков, ДАН, 92, № 5, 891 (1953). ² С. Н. Черпиков, Матем. сборн., 35 (77), 1, 93 (1954). ³ Н. В. Баева, ДАН, 92, № 5, 877 (1953). ⁴ Н. В. Черникова, Матем. сборн., 39 (81), 3, 273 (1956). ⁵ Ph. Hall, J. London Math. Soc., 12, 201 (1937).