

А. П. ШОСТАК

О E -КОМПАКТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком П. С. Александровым 8 II 1972)

E -компактные пространства впервые были определены в ⁽¹⁾. Подробное изучение этого понятия, а также связанного с ним понятия E -полной регулярности было проведено в ⁽²⁾. Дальнейшее развитие эта теория получила в ⁽³⁾. Там же и в ⁽⁴⁾ приводится сводка основных результатов, полученных в данной области. Напоминаем, что под E в данной теории всегда понимается хаусдорфово пространство.

Настоящая работа состоит из двух параграфов. Первый параграф посвящен изучению некоторых классов E -компактности (см. теорему и предложение). Во втором параграфе определяются и изучаются E -псевдокомпактные пространства, которые являются обобщением псевдокомпактных пространств и играют в некотором смысле ту же роль по отношению к E -компактным пространствам, какую псевдокомпактные играют по отношению к действительно компактным пространствам.

1. Напомним, что пространство X называется E -вполне регулярным, если X гомеоморфно подпространству E^τ , где τ — некоторое кардинальное число. Класс E -вполне регулярных пространств обозначается $\mathfrak{C}(E)$. Пространство X называется E -компактным, если X гомеоморфно замкнутому подпространству E^τ . Класс E -компактных пространств обозначается $\mathfrak{K}(E)$.

Лемма 1. *$\mathcal{T}_1$ -пространство X E -компактно тогда и только тогда, когда для каждой расходящейся в X направленности $\{S_a\}_{a \in A}$ существует $f \in C(X, E)$ такая, что $\{f(S_a)\}_{a \in A}$ расходится в E .*

Доказательство. Пусть $X \in \mathfrak{K}(E)$. Из теоремы вложения (см. ⁽³⁾) следует, что X (с точностью до гомеоморфизма) можно рассматривать как замкнутое подпространство в $E^{C(X, E)}$. Пусть $\{S_a\}_{a \in A}$ расходится в X . Тогда существует $f \in C(X, E)$ такая, что $\{fS_a\}_{a \in A}$ расходится в E .

Обратно, пусть для каждой расходящейся $\{S_a\}_{a \in A}$ существует функция $f \in C(X, E)$ такая, что $\{f(S_a)\}_{a \in A}$ расходится в E . Покажем сначала, что X E -вполне регулярно. Действительно, так как X — $\mathcal{T}_0$ -пространство, то достаточно показать, что для каждой точки $a \in X$ и произвольного замкнутого $X_0 (\subset X)$, $a \notin X_0$, существует функция $f \in C(X, E^m)$ такая, что $f(a) \notin [f(X_0)]$ (см. ⁽³⁾). Допустим противное. Тогда можем построить расходящуюся направленность, на которой каждая $f \in C(X, E)$ сходится к $f(a)$. Итак, $X \in \mathfrak{C}(E)$. Вложим X параметрически в $E^{C(X, E)}$. Допустим $X \neq [X] \subset E^{C(X, E)}$, можем выбрать $a \in [X] \setminus X$ и универсальную направленность $\{S_a\}_{a \in A} \subset X$, сходящуюся к a . Ясно, что каждая $f \in C(X, E)$ будет сходиться на $\{S_a\}_{a \in A}$ к $\tilde{f}(a)$, где $\tilde{f}$ — продолжение f на $[X]$. Полученное противоречие и доказывает лемму.

Множество $X_0 \subset X$ называется E -замкнутым, если существуют $T = [T] \subset E^n$ (при некотором натуральном n) и $f \in C(X, E^n)$ такие, что $X_0 = f^{-1}(T)$ (см. ⁽³⁾).

Назовем множество в E^τ стандартным, если оно есть произведение множеств, замкнутых в E . Нетрудно видеть, что, для того чтобы в произвольном пространстве X пересечение τ E -замкнутых множеств было E -замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы каждое стандартное множество в E^τ было E -замкнутым (ср. ⁽³⁾, 3.19).

Пространство X назовем наследственно E -компактным, если каждое $H \subset X$ является E -компактным. Очевидно, $X \in \mathfrak{K}(E)$ наследственно E -компактно тогда и только тогда, когда $X \setminus \{a\} \in \mathfrak{K}(E)$ для каждого $a \in X$. Пусть $\mathfrak{K}(E_1) \supset \mathfrak{K}(E)$ и для каждого $a \in E_1$ существуют $b \in E$ и $f \in C(E_1, E)$ такие, что $a = f^{-1}(b)$. Тогда, если E наследственно E -компактно, то и E_1 наследственно E_1 -компактно.

Центрированную систему ξ E -замкнутых в X множеств назовем E -фильтром, если она замкнута относительно конечных пересечений и из того, что $B \supset A$, $A \in \xi$ и B E -замкнуто, следует $B \in \xi$. E -фильтр, не содержащийся ни в каком отличном от него E -фильтре, назовем E -ультрафильтром. В случае $E = R$ или $E = I$ E -фильтры совпадают с так называемыми нуль-фильтрами (см. (5)).

В (5) доказывается следующий критерий: для того чтобы вполне регулярное пространство X было действительно компактным, т. е. R -компактным, необходимо и достаточно, чтобы каждый нуль-ультрафильтр, обладающий свойством счетного пересечения, был сходящимся. Следующая теорема является обобщением этого критерия на случай пространства E более общей природы.

Теорема. Пусть пространство E удовлетворяет следующим условиям: а) E — регулярное пространство, финально компактное, начиная с мощности τ' , где τ' — наименьшая из мощностей, превосходящих τ ; б) E наследственно E -компактно; в) каждое стандартное множество в E^c E -замкнуто. Предположим, что X E -вполне регулярно.

Тогда X E -компактно в том и только в том случае, когда каждый E -ультрафильтр F , обладающий свойством τ -пересечения (т. е. для каждого $\mathfrak{A} \subset F$, $|\mathfrak{A}| \leq \tau$, выполнено $\bigcap \{U : U \in \mathfrak{A}\} \neq \emptyset$), сходится.

Доказательство. Пусть $X \in \mathfrak{K}(E)$. Возьмем свободный E -ультрафильтр F и покажем, что он не обладает свойством τ -пересечения. Построим по F некоторую универсальную направленность $\{S_a\}_{a \in F}$, где $S_a \in \mathfrak{A}$. Возьмем функцию $f \in C(X, E)$ такую, что $\{f(S_a)\}_{a \in F}$ расходится (и, очевидно, универсальна) в E (см. лемму 1). Строим в каждой точке $e \in E$ открытую окрестность, содержащую неконфинальную часть направленности $\{f(S_a)\}_{a \in F}$. Из полученного покрытия выделяем подпокрытие $\mathfrak{A}$ такое, что $|\mathfrak{A}| \leq \tau$. Ясно, что $f^{-1}(X \setminus U) \in F$ для каждого $U \in \mathfrak{A}$ и $\bigcap (f^{-1}(X \setminus U) : U \in \mathfrak{A}) = f^{-1}(\bigcap (X \setminus U) : U \in \mathfrak{A}) = \emptyset$.

Обратно, пусть в каждом свободном E -ультрафильтре в X имеется τ множеств с пустым пересечением. Вложим X (параметрически) в $E^{C(X, E)}$. Нам надо показать, что $\beta_E X = X$ (см. (3)). Пусть $x_0 \in \beta_E X \setminus X$. Продолжим каждую $f \in C(X, E^k)$, для каждого $k < \aleph_0$ до $\tilde{f} \in C(\beta_E X, E^k)$. Рассматриваем совокупность $\mathcal{T}_f$ замкнутых в E^k -множеств, содержащих точку $\tilde{f}(x_0)$. Ясно, что $\{f^{-1}(T) : T \in \mathcal{T}_f, f \in C(X, E^k), k < \aleph_0\}$ является E -ультрафильтром, сходящимся к точке x_0 . Следовательно, $F = \{f^{-1}(T) \cap X : T \in \mathcal{T}_f, f \in C(X, E^k), k < \aleph_0\}$ — свободный E -ультрафильтр. Пусть $\bigcap \{f_v^{-1}(T_v) \cap X : v \in \Gamma\} = \emptyset$, где $|\Gamma| \leq \tau$. Обозначим $B = \bigcap \{\tilde{f}_v^{-1}(T_v) : v \in \Gamma\}$, тогда $x_0 \in B$, B E -замкнуто и $B \cap X = \emptyset$. Возьмем функцию $\varphi : \beta_E X \rightarrow E^m$ такую, что $B = \varphi^{-1}(T)$ для некоторого $T = [T] \subset E^m$. Итак, $x_0 \in \varphi^{-1}(T)$, $\varphi^{-1}(T) \cap X = \emptyset$. Рассмотрим сужение $\varphi|_X$ функции φ на X ; оно отображает X в $E^m \setminus T$. Но $E^m \setminus T$ E -компактно (ибо $m < \aleph_0$), следовательно, $\varphi|_X$ можно продолжить на $\beta_E X$ до функции $\tilde{\varphi} : \beta_E X \rightarrow E^m \setminus T$. Очевидно, $\tilde{\varphi} \neq \varphi$, но $\tilde{\varphi}|_X = \varphi|_X$. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Приведем некоторые примеры, иллюстрирующие теорему.

1. $E = R$. Очевидно, требования а), б), в) (при $\tau = \aleph_0$) выполнены; теорема в этом случае совпадает с ранее сформулированным критерием для действительно компактных пространств.

2. Возьмем в качестве E подпространство плоскости, состоящее из концентрических окружностей радиусов $1, 1/2, \dots, 1/n, \dots$. Это метрическое пространство имеет счетную базу, каждое замкнутое множество в $F^{\aleph_0}$

E -замкнуто, но E не наследственно E -компактно. Пусть $H = E \setminus \{a\}$, $a \in E$. В H каждый E -ультрафильтр, имеющий свойство счетного пересечения, сходится, но H не E -компактно. Таким образом, теорема в данном случае не применима.

3. Пусть E — стрелка. Пространство E является финально компактным. Можно показать, что E наследственно E -компактно и каждое стандартное множество в $E^{\aleph_0}$ E -замкнуто. Следовательно, класс $\mathfrak{K}(E)$ характеризуется теоремой.

Остальная часть настоящего параграфа посвящена рассмотрению класса $\mathfrak{K}(N)$, где N — пространство натуральных чисел.

Известно (см. ⁽⁴⁾), что, $\mathfrak{K}(E) = \mathfrak{K}(D)$ тогда и только тогда, когда E — нульмерный бикомпакт, содержащий более одной точки. Нетрудно показать, что если E финально компактное, не бикомпактное нульмерное (в смысле ind) пространство, то $\mathfrak{K}(E) = \mathfrak{K}(N)$. Пусть P — дискретное пространство неизмеримой мощности τ . Воспользовавшись леммой 1, получаем, что $\mathfrak{K}(P) = \mathfrak{K}(N)$. Используя этот факт, нетрудно доказать следующее предложение.

Предложение. Пусть E — паракомпактное нульмерное (в смысле Ind) пространство, $|E|$ неизмерима.

Тогда $\mathfrak{K}(E) \subset \mathfrak{K}(N)$. При этом, если E не бикомпактно, то $\mathfrak{K}(E) = \mathfrak{K}(N)$.

2. Пространство X назовем E -псевдокомпактным, если $[hX]$ бикомпактно в $E^{C(X, E)}$, где h — параметрическое вложение, соответствующее классу функций $C(X, E)$. Класс всех E -псевдокомпактных пространств будем обозначать $\mathfrak{P}(E)$. Очевидно $\mathfrak{P}(E) \subset \mathfrak{C}(E)$. Нетрудно убедиться в справедливости следующей леммы.

Лемма 2. Пусть $X \in \mathfrak{C}(E)$. Тогда, для того чтобы X было E -псевдокомпактным, необходимо и достаточно, чтобы для каждой универсальной направленности $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset X$ и каждой функции $f \in C(X, E)$ сходилась направленность $\{f(S_\alpha)\}_{\alpha \in A}$.

Следствие. Пространство X R -псевдокомпактно тогда и только тогда, когда оно псевдокомпактно.

Легко видеть, что $\mathfrak{P}(I)$ есть класс всех вполне регулярных пространств, и вообще, $\mathfrak{P}(E) = \mathfrak{C}(E)$ для любого бикомпактного E .

В ⁽⁴⁾ отмечаются, что если ω_τ и ω_λ — наименьшие порядковые числа, соответствующие регулярным мощностям τ и λ ($\tau \neq \lambda$, τ и λ бесконечны), то $\mathfrak{K}(TW(\omega_\tau))$ и $\mathfrak{K}(TW(\omega_\lambda))$ несравнимы. В терминах классов E -псевдокомпактности получаем следующий результат: $TW(\omega_\tau) \in \mathfrak{P}(TW(\omega_\lambda))$.

Рассмотрим еще следующий пример. Выбросим из $\beta N \setminus N$ непустое множество B , $|B| < 2^c$. Можно показать, что полученное таким образом пространство $\tilde{N}$ обладает следующими свойствами: 1) $\tilde{N}$ счетнокомпактно и, следовательно, $\tilde{N} \in \mathfrak{P}(R)$; 2) $\tilde{N} \in \mathfrak{P}(TW(\omega_\tau))$ для каждого τ ; 3) $TW(\omega_\tau) \in \mathfrak{P}(\tilde{N})$ при $\tau \neq \aleph_0$.

Пусть $\mathfrak{C}(E) = \mathfrak{C}(E_i)$. Тогда, если $E_i \in \mathfrak{K}(E)$, то $\mathfrak{P}(E) \subset \mathfrak{P}(E)$. Отсюда можем заключить, что $\mathfrak{P}(N) = \mathfrak{P}(P)$, $|P|$ — неизмеримая мощность.

Очевидно следующее соотношение: $\mathfrak{K}(E) \cap \mathfrak{P}(E) = \mathfrak{K}(I) \cap \mathfrak{C}(E)$ (эти пересечения совпадают с классом бикомпактных E -вполне регулярных пространств). В частности, $\mathfrak{K}(I) \cap \mathfrak{P}(I) = \mathfrak{K}(I)$ — класс бикомпактов. Очевидно, E является бикомпактом тогда и только тогда, когда $E \in \mathfrak{P}(E)$.

Выражаю глубокую благодарность проф. Ю. М. Смирнову и М. А. Гольдману за большое внимание к настоящей работе и ценные советы.

Латвийский государственный университет
им. П. Стучки

Поступило
26 I 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ S. Mrówka, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astr. Phys., 6, 95 (1958).
- ² S. Mrówka, R. Engelking, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III, 6, 429 (1958).
- ³ S. Mrówka, Acta Math., 120, 161 (1968). ⁴ S. Mrówka, Proc. of the Kanpur Topological Conference, 1968. ⁵ R. Gillman, M. Jerison, Rings of Continuous Functions, Princeton, 1960.