

А. ЯНУШАУСКАС

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ОБЛАСТЕЙ, ОГРАНИЧИВАЕМЫХ СФЕРАМИ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 9 II 1972)

Рассмотрим конформное отображение $z = z(\zeta)$ плоской односвязной области D с гладкой границей на единичный круг $|z| < 1$. Пусть точка ζ_0 переходит в точку $z = 0$. Рассмотрим функцию Грина g области D с полюсом в точке ζ_0 . Пусть $h(x, y)$ — функция, гармонически сопряженная с функцией g . Как известно ⁽¹⁾,

$$z(\zeta) = \exp\{g(x, y) + ih(x, y)\}. \quad (1)$$

Из (1) следует, что при конформном отображении $z = z(\zeta)$ линии уровня функции g переходят в окружности $|z| = \text{const}$, а ортогональные траектории линий уровня g переходят в ортогональные траектории окружностей $|z| = \text{const}$. Это означает, что при конформном отображении линии уровня функции Грина области D с полюсом в точке ζ_0 переходят в линии уровня функции Грина $1 - \ln r$ круга $|z| < 1$ с полюсом в точке $z = 0$, а ортогональные траектории линий уровня переходят в ортогональные траектории. Это свойство может быть положено в основу определения конформных отображений плоских областей ⁽²⁾, причем это определение допускает обобщение на трехмерный случай ⁽³⁻⁵⁾.

Определение 1. Пусть Ω — некоторая область трехмерного пространства, а Σ — единичный шар, пусть g_1 — функция Грина области Ω с полюсом в точке $X_1 \in \Omega$, а g_2 — функция Грина Σ с полюсом в точке $X_2 \in \Sigma$. Пусть $j_i(\varphi, \theta)$ — траектория поля $\text{grad } g_i$, $i = 1, 2$, входящая в точку X_i с касательной

$$l_i: \frac{x - a_i}{\sin \theta \cos \varphi} = \frac{y - b_i}{\sin \theta \sin \varphi} = \frac{z - c_i}{\cos \theta}, \quad X_i = (a_i, b_i, c_i).$$

Отображение $\chi: \Omega \rightarrow \Sigma$ определим следующим образом: точке $A \in \Omega$ пересечения траектории $j_1(\varphi, \theta)$ поля $\text{grad } g_1$ с поверхностью уровня $g_1 = v$ поставим в соответствие точку $B \in \Sigma$, лежащую на пересечении траекторий $j_2(\varphi - \varphi_0, \theta - \theta_0)$ поля $\text{grad } g_2$ с поверхностью уровня $g_2 = v$; здесь φ_0 и θ_0 — фиксированные числа, $0 \leq \varphi_0 \leq 2\pi$, $0 \leq \theta_0 \leq \pi$. Отображение χ будем называть гармоническим отображением области Ω на шар Σ .

В плоском случае как внутренность односвязной области, так и ее внешность всегда можно конформно отобразить на внутренность единичного круга так, чтобы любая наперед заданная точка перешла в центр круга, а всякое конформное отображение круга $|z| < 1$ на себя продолжается до конформного отображения всей плоскости на себя. Для гармонических отображений трехмерных областей все эти факты не имеют места.

Покажем, что внешность Ω единичного шара Σ не может быть гармонически гомеоморфно отображена на внутренность Σ так, чтобы заданная точка $X_0 \in \Omega$ перешла в центр O шара Σ . Без ущерба для общности можно считать $X_0 = (0, 0, \lambda)$, $\lambda > 1$. Функция Грина области Ω с полюсом

в точке X_0 имеет вид

$$g = [x^2 + y^2 + (z - \lambda)^2]^{-1/2} - \frac{1}{\lambda} \left[x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{\lambda} \right)^2 \right]^{-1/2}.$$

Функция g имеет невырожденную критическую точку $Y_0 = (0, 0, -1 - \lambda - \sqrt{\lambda})$. В точку Y_0 входят две траектории поля $\text{grad } g$, а траектории, выходящие из этой точки, заполняют двумерную осесимметричную поверхность N , проходящую через X_0 . В критической точке g принимает значение $(\sqrt{\lambda} - 1) / (\lambda\sqrt{\lambda} + \lambda + \sqrt{\lambda} + 1)$.

Функция Грина $g_0 = [x^2 + y^2 + z^2]^{1/2} - 1$ шара Σ с полюсом в точке O не имеет критических точек, поэтому гармоническое отображение $\chi: \Omega \rightarrow \Sigma$, определяемое функциями g и g_0 , не может быть гомеоморфизмом в целом, если оно гомеоморфно отображает окрестности полюсов этих функций.

Рассмотрим функцию Грина внешности $\Omega(R)$ шара радиуса R с полюсом в точке $x = y = 0, z = vR, v > 1$,

$$G = [x^2 + y^2 + (z - vR)^2]^{-1/2} - \frac{1}{v} \left[x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{v} R \right)^2 \right]^{-1/2}.$$

Эта функция имеет критическую точку $Y = \left(0, 0, -R \frac{v + \sqrt{v} + 1}{\sqrt{v}} \right)$ и в этой точке принимает значение

$$G_K = \frac{1}{R} \frac{\sqrt{v} - 1}{v \sqrt{v} + v + \sqrt{v} + 1}.$$

Характер этой критической точки такой же, как и критической точки функции g .

Рассмотрим гармоническое отображение внешностей $\Omega(R_1)$ и $\Omega(R_2)$ шаров радиусов R_1 и R_2 . Очевидно, что это отображение будет гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда совпадают критические значения соответствующих функций Грина. Следовательно, должно выполняться соотношение

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{v_1 \sqrt{v_1} + v_1 + \sqrt{v_1} + 1}{v_2 \sqrt{v_2} + v_2 + \sqrt{v_2} + 1} \frac{\sqrt{v_2} - 1}{\sqrt{v_1} - 1}, \quad (2)$$

где $X_1 = (0, 0, v_1 R_1)$ и $X_2 = (0, 0, v_2 R_2)$ — полюсы функций Грина, определяющих отображение.

Таким образом, внешности двух шаров не всегда можно гармонически гомеоморфно отобразить друг на друга так, чтобы переходили две наперед заданные точки друг в друга. Также нельзя отобразить внешность шара гармонически гомеоморфно на себя так, чтобы любая наперед заданная точка переходила в другую наперед заданную точку. Это свойство внешности трехмерного шара будем называть гармонической неодносвязностью. Функция Грина шара $\Sigma(R)$ радиуса R с полюсом в любой точке не имеет критических точек в $\Sigma(R)$ ⁽⁶⁾, поэтому $\Sigma(R)$ всегда можно гармонически гомеоморфно отобразить на себя так, чтобы любая наперед заданная точка $X \in \Sigma(R)$ перешла в любую другую наперед заданную точку $Y \in \Sigma(R)$. Следовательно, шар является гармонически односвязной областью.

Рассмотрим функцию Грина

$$G_1 = \left[x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{v} R \right)^2 \right]^{-1/2} - v [x^2 + y^2 + (z - vR)^2]^{-1/2}$$

шара $\Sigma(R)$ с полюсом в точке $\xi = (0, 0, \frac{1}{v} R)$, $v > 1$. Эта функция только множителем $-v$ отличается от функции Грина внешности шара $\Sigma(R)$ с полюсом в точке $r_0 = (0, 0, vR)$, симметричной точке ξ относительно сферы $S(R) : \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$. Рассмотрим гармоническое отображе-

ние ψ единичного шара Σ на шар радиуса R $\Sigma(R)$, определяемое функциями G_1 и g_0 . Это отображение не может быть продолжено до гармонического гомеоморфизма всего пространства на себя, так как функция G_1 имеет ту же критическую точку, что и функция G , только в этой точке G_1 принимает значение

$$\gamma = -\frac{\nu}{R} \frac{\sqrt{\bar{\nu}} - 1}{\nu \sqrt{\bar{\nu}} + \nu + \sqrt{\bar{\nu}} + 1}.$$

Отображение ψ гомеоморфно продолжается лишь на область, ограничиваемую поверхностью $G_1 = \gamma$. В частности, если выполняется неравенство

$$R \leq \frac{\nu(\sqrt{\bar{\nu}} - 1)}{\nu \sqrt{\bar{\nu}} + \nu + \sqrt{\bar{\nu}} + 1}, \quad (3)$$

то ψ отображает все пространство R^3 на некоторую его часть, причем образы бесконечно удаленных точек заполняют двумерную поверхность $G_1 = -1, -1 \leq \gamma$.

Если вместо функции g_0 рассмотрим функцию

$$g_\lambda = \left[x^2 + y^2 + \left(z - \frac{1}{\lambda} \right)^2 \right]^{-1/2} - \lambda [x^2 + y^2 + (z - \lambda)^2]^{-1/2}$$

и будем рассматривать гармоническое отображение ψ_2 шара Σ на шар $\Sigma(R)$, определяемое функциями G_1 и g_λ , то необходимым условием продолжимости этого отображения до гармонического гомеоморфизма всего пространства является совпадение критических значений G_1 и g_λ , т. е. выполнение равенства

$$R = \frac{\nu}{\lambda} \frac{\sqrt{\bar{\nu}} - 1}{\sqrt{\bar{\lambda}} - 1} \frac{\lambda \sqrt{\bar{\lambda}} + \lambda + \sqrt{\bar{\lambda}} + 1}{\nu \sqrt{\bar{\nu}} + \nu + \sqrt{\bar{\nu}} + 1}. \quad (4)$$

Более детальный анализ поведения векторных полей $\text{grad } G_1$ и $\text{grad } g_\lambda$ в окрестностях соответствующих критических точек G_1 и g_λ показывает, что (4) является и достаточным условием продолжимости гармонического гомеоморфизма ψ_λ .

Свойством гармонической неодносвязности обладает не только внешность шара. Справедливо более общее утверждение: функция Грина G внешности области D , диффеоморфной шару, с полюсом в любой конечной точке имеет хотя бы одну критическую точку, причем если эта точка невырождена, то она единственная. Этот факт очень легко доказывается в случае, когда D является осесимметричной областью и полюс функции Грина внешности лежит на оси симметрии D .

Рассматриваемая функция Грина симметрична относительно оси симметрии Oz области D , поэтому ее производные по x и y равны нулю всюду на оси Oz . Поскольку функция Грина обращается в нуль на границе области D и стремится к нулю на бесконечности, то ее след на том участке оси Oz , на котором функция Грина ограничена, достигает максимума в некоторой точке Y . Эта точка и является критической точкой функции Грина.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
20 I 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функции комплексного переменного, «Наука», 1965. ² Р. Курант, Принципы Дирихле, Конформные отображения и минимальные поверхности, ИЛ, 1953. ³ М. А. Лаврентьев, Теория квазиконформных отображений, Тр. III Всесоюз. матем. съезда, 3, М., 1958, стр. 198. ⁴ М. А. Лаврентьев, Квазиконформные отображения и краевые задачи, Совр. пробл. теор. аналит. функц., М., 1966, стр. 179. ⁵ J. J. Gergen, Am. J. Math., 52, № 2, 197 (1930). ⁶ J. J. Gergen, Am. J. Math., 53, № 4, 746 (1931).