

УДК 517.948:513.88

МАТЕМАТИКА

С. П. КОВАЛЕНКО

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О РАСПОЛОЖЕНИИ ПОДПРОСТРАНСТВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЮ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком С. М. Никольским 11 X 1974)

В дальнейшем E_i , $i=1, 2, 3$, — банаховы пространства, а E_i^* — им сопряженные. Символ (f, u) определяет значение функционала $f \in E_i^*$ на элементе $u \in E_i$.

Рангом линейного многообразия M на подпространстве N из E_1 будем называть величину

$$\text{rg}(M, N) = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\substack{f_i \in N^\perp \\ u_j \in M}} \text{rang} \|(f_i, u_j)\|_1^n,$$

где $N^\perp$ — аннулятор N из E_1^* .

Теорема 1. Для того чтобы в M существовало p линейно независимых элементов, ненулевая линейная оболочка которых не принадлежит N , необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{rg}(M, N) = p. \quad (1)$$

Доказательство. Пусть $\{e_i\}_1^p$ — полная система линейно независимых элементов из M , линейная оболочка которых не принадлежит N . Обозначим через N_i линейную оболочку N и элементов $e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_p$. Линейное многообразие N_i порождено подпространством и конечным набором векторов, следовательно, оно замкнуто. Так как $e_i \in N_i$, то на основании следствия к теореме Хана — Бахаха ⁽¹⁾ в $N_i^\perp$ существует функционал f_i такой, что $(f_i, e_i) = 1$. Нетрудно понять, что функционал $f_i \in N^\perp$ и аннулируется на элементах $e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_p$. Таким образом, в $N^\perp$ существует функционал f_i такой, что $(f_i, e_j) = \delta_{ij}$. Отсюда непосредственно следует, что $\text{rg}(M, N) \geq p$.

Покажем теперь, что выполняется равенство (1). Для этого заметим, что произвольный элемент u_i из M либо принадлежит N , тогда $(f, u_i) = 0 \quad \forall f \in N^\perp$, либо его можно представить в виде $u_i = u_i^1 + u_i^2$, где $u_i^1 \in N$, а $u_i^2 \in N$, тогда $(f, u_i) = (f, u_i^2) \quad \forall f \in N^\perp$.

Ясно, что, какими бы ни были элементы $u_1, u_2, \dots, u_{p+1}$ второго типа из M , между элементами $u_1^2, u_2^2, \dots, u_{p+1}^2$ существует линейная зависимость. Поэтому найдутся такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{p+1}$, не все равные нулю, что $\sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i (f, u_i) = \sum_{i=1}^{p+1} \lambda_i (f, u_i^2) = 0 \quad \forall f \in N^\perp$.

Таким образом,

$$\det \|(f_i, u_j)\|_1^{p+1} = 0 \quad \forall f_i \in N^\perp \text{ и } \forall u_j \in M,$$

так как у этого определителя существует либо нулевой столбец, либо столбец, который является линейной комбинацией остальных.

Пусть теперь $\text{rg}(M, N) = p$. Покажем, что в M существует только p линейно независимых элементов, ненулевая линейная оболочка которых не принадлежит N . В самом деле, так как $\text{rg}(M, N) = p$, то найдутся эле-

менты $e_1, e_2, \dots, e_p \in M$ и функционалы $f_1, f_2, \dots, f_p \in N^\perp$ такие, что $\det \|(f_i, e_j)\|_1^p \neq 0$.

Элементы $e_i \notin N$, так как в противном случае $(f, e_i) = 0 \quad \forall f \in N^\perp$, а это противоречит тому, что рассмотренный определитель не равен нулю.

Обозначим через N_p линейную оболочку N и элементов $e_1, e_2, \dots, e_p$ и допустим, что в M существует элемент $e_{p+1} \notin N_p$. Тогда в $N^\perp$ найдется функционал f_{p+1} такой, что $(f_{p+1}, e_i) = \delta_{ip+1}$, $i \leq p+1$. Поэтому

$$\det \|(f_i, e_j)\|_1^{p+1} = \det \|(f_i, e_j)\|_1^p \neq 0,$$

но это противоречит допущению о том, что $\text{rg}(M, N) = p$.

Таким образом, если выполняется условие (1), то в M существует только p линейно независимых элементов, ненулевая линейная оболочка которых не принадлежит N .

Следствие. Для того чтобы в M существовало бесконечно много линейно независимых элементов, которые не принадлежат N , необходимо и достаточно, чтобы $\text{rg}(M, N) = \infty$.

Теорема 2. Для того чтобы линейная оболочка системы $\{e_j\}_1^\infty$ линейно независимых элементов из E_1 не принадлежала N , необходимо и достаточно, чтобы в $N^\perp$ существовала система функционалов $\{f_i\}_1^\infty$ такая, что

$$\det \|(f_i, e_j)\|_1^n = 1 \quad \forall n. \quad (2)$$

Доказательство. Пусть линейная оболочка системы $\{e_i\}_1^\infty$ линейно независимых элементов из E_1 не принадлежит N . Обозначим через N_i линейную оболочку N и элементов $e_1, e_2, \dots, e_{i-1}$. Так как линейное многообразие N_i замкнуто и элемент $e_i \notin N_i$, то в $N_i^\perp$ найдется функционал f_i такой, что $(f_i, e_i) = 1$. Кроме того ясно, что $f_i \in N^\perp$ и $(f_i, e_j) = \delta_{ij}$, $i \geq j$. Таким образом, при любом n для системы $\{e_i\}_1^n$ линейно независимых элементов из E_1 существует система $\{f_i\}_1^n$ функционалов из $N^\perp$ такая, что $(f_i, e_j) = \delta_{ij}$, $i \geq j$. Отсюда непосредственно вытекает, что $\det \|(f_i, e_j)\|_1^n = 1 \quad \forall n$.

Пусть выполняется условие (2), тогда система элементов $\{e_i\}_1^\infty$ не содержится в N . Действительно, из предположения о том, что какой-то элемент $e_i \in N$, следует $(f, e_i) = 0 \quad \forall f \in N^\perp$. Поэтому все определители, начиная с i -го порядка, будут равны нулю, но это противоречит условию (2).

Следствие. Для того чтобы бесконечномерное линейное многообразие $M \subset E_1$ не имело общих элементов с подпространством $N \subset E_1$, необходимо и достаточно, чтобы для любой системы $\{e_i\}_1^\infty$ линейно независимых элементов из M существовала система функционалов $\{f_i\}_1^\infty$ из $N^\perp$ такая, что выполняется условие (2).

Пусть T — замкнутый оператор с областью определения $D(T)$ в E_1 и областью значений $R(T)$ в E_2 , $N(T)$ — ядро оператора T .

Будем считать, что G — подпространство E_1 . Обозначим через $\hat{T}$ сужение оператора T на область $D(\hat{T}) = D(T) \cap G$.

Из теоремы 1 вытекает

Теорема 3. Число нулей оператора T , утерянных оператором $\hat{T}$, равно $\text{rg}(N(T), G)$.

Следствие. Если $\text{nul } T < \infty$, то для однозначной разрешимости уравнения

$$\hat{T}u = v \quad (\hat{T})$$

необходимо и достаточно, чтобы $\text{rg}(N(T), G) = \text{nul } T$.

Теорема 4. Если T — плотно определенный оператор и $\text{rg}(G, N(T)) < \infty$, то $\hat{T}$ — вырожденный оператор и $\text{rank } \hat{T} = \text{rg}(G, N(T))$.

Доказательство. Заметим, что $N(\hat{T}) = N(T) \cap G$ замкнуто в силу замкнутости $N(T)$ и G . Кроме того, $N(\hat{T})$ — подпространство пространства G с дефектом $\text{rg}(G, N(T))$, а $D(\hat{T})$ плотно в G . На основании леммы 8.1 работы (2) пространство G разлагается в прямую сумму $G = N(\hat{T}) + \mathcal{L}$, где

$\mathcal{L}$ принадлежит $L(\dot{T})$ и $\dim \mathcal{L} = \operatorname{rg}(G, N(T))$. Отсюда вытекает, что $D(\dot{T}) = G$. В результате того, что подпространство $\mathcal{L}$ отображается взаимно-однозначно оператором $\dot{T}$ в подпространство $R(\dot{T})$, и следует доказательство теоремы.

Теорема 5. Если $E_1 \neq G + H$, где G и H — подпространства E_1 , то

а) $\operatorname{nul} \dot{T} = \operatorname{rg}(N(T), H)$;

б) для однозначной разрешимости уравнения (Т) необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{rg}(N(T), H) = 0$.

Теорема 6. Если $\operatorname{nul} T = \infty$, $\dim G^\perp = \infty$ и система элементов $\{e_i\}_1^\infty$ является базисом в $N(T)$, то для однозначной разрешимости уравнения (Т) необходимо и достаточно, чтобы в $G^\perp$ существовала система функционалов $\{f_i\}_1^\infty$ такая, что выполняется условие (2).

Теорема 7. Если $\operatorname{nul} T = \infty$, $\dim G^\perp = \infty$, то для однозначной разрешимости уравнения (Т) необходимо и достаточно, чтобы для любой системы $\{e_i\}_1^\infty$ линейно независимых элементов из $N(T)$ существовала система функционалов $\{f_i\}_1^\infty$ из $G^\perp$ такая, что выполняется условие (2).

Теорема 8. Если T — плотно определенный и нормально разрешимый оператор, а $\dim G^\perp < \infty$, то $\dot{T}$ — нормально разрешимый оператор и

$$\dim G^\perp - \operatorname{rg}(N(T), G) = \operatorname{rg}(R(T), R(\dot{T})). \quad (3)$$

Доказательство. Как известно ⁽²⁾, пространство E_1 можно разложить в прямую сумму $E_1 = G + \mathcal{L}$, где $\mathcal{L}$ принадлежит $D(T)$ и $\dim \mathcal{L} = \dim G^\perp$, а $D(\dot{T})$ плотно в G . Таким образом, в результате сужения оператора T на область $D(\dot{T})$ теряется $\dim G^\perp$ линейно независимых элементов из области его определения, среди них $\operatorname{rg}(N(T), G)$ нулей оператора T . Но подпространство утерянных элементов из $D(T)$ без нулей оператора T отображается взаимно-однозначно этим оператором на подпространство утерянных элементов из $R(T)$, отсюда и следует утверждение теоремы.

Следствие. Если выполняются условия теоремы 8, то

$$\operatorname{def} \dot{T} = \operatorname{def} T + \dim G^\perp - \operatorname{rg}(N(T), G); \quad (4)$$

$$\operatorname{ind} \dot{T} = \operatorname{ind} T - \dim G^\perp. \quad (5)$$

Результаты, подобные теореме 3 и соотношениям (4), (5), получены Ю. К. Ландо ⁽³⁾ для конечных сужений интегродифференциальных операторов, действующих в конкретном гильбертовом пространстве.

Рассмотрим оператор $T(x, u) = Ax + Bu$, где A и B — замкнутые операторы соответственно из E_1 и E_2 в E_3 . Назовем оператор T управляемым из $E_1 \times E_2$ в E_3 , если $R(T) = E_3$.

Теорема 9. Если A — нормально разрешимый оператор и выполняется хотя бы одно из условий

$$\operatorname{rg}(R(B), R(A)) < \infty \text{ или } \operatorname{rg}(\mathcal{L}, R(A)) < \infty,$$

где $\mathcal{L}$ — прямое дополнение $R(B)$, то T — нормально разрешимый оператор. При выполнении второго условия $\operatorname{def} T = \operatorname{rg}(\mathcal{L}, R(A))$.

Доказательство. При выполнении первого условия линейное многообразие $R(T)$ порождено подпространством $R(A)$ и конечным набором линейно независимых элементов из $R(B)$, следовательно, $R(T)$ замкнуто.

При выполнении второго условия вне $R(T)$ содержится конечное число линейно независимых элементов. Таким образом, пространство E_3 разлагается в прямую сумму $E_3 = R(T) + N$, где $\dim N = \operatorname{rg}(\mathcal{L}, R(A))$. Поскольку E_3 замкнуто, а N конечномерно, следует, что $R(T)$ замкнуто и $\operatorname{def} T = \dim N$.

Следствие 1. Если A — нормально разрешимый оператор, то для управляемости оператора T необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{rg}(\mathcal{L}, R(A)) = 0$.

Следствие 2. Если A — нормально разрешимый оператор и $\text{def } A < \infty$, то

$$\text{def } T = \text{def } A - \text{rg}(R(B), R(A)).$$

Доказательство. В данном случае $E_3 = R(A) + \mathcal{L}$, где $\dim \mathcal{L} = \text{def } T$. В $R(B)$ содержится $\text{rg}(R(B), R(A))$ линейно независимых элементов, которые не принадлежат $R(A)$. Обозначим через N линейную оболочку этих элементов, тогда $R(T) = R(A) + N$ и $\text{def } T = \text{codim}(R(A) + N) = \text{codim } R(A) - \dim N = \text{def } A - \text{rg}(R(B), R(A))$.

Следствие 3. Если A — нормально разрешимый оператор и $\text{def } A < \infty$, то для управляемости оператора T необходимо и достаточно, чтобы $\text{rg}(R(B), R(A)) = \text{def } A$.

Этот результат получен Ландо ⁽⁴⁾ с привлечением понятия d -мерно-значного сопряженного оператора при условии, что $E_1 = E_2$.

Пусть G — замкнутое линейное многообразие банахова пространства $E_1 \times E_2$, а $\tilde{T}$ — сужение замкнутого оператора T на область $D(\tilde{T}) = D(T) \cap G$.

Теорема 10. Если $\dim G^\perp < \infty$, а плотно определенный оператор T управляем из $E_1 \times E_2$ в E_3 , то для того чтобы оператор $\tilde{T}$ был управляем из $E_1 \times E_2$ в E_3 , необходимо и достаточно, чтобы $\dim G^\perp = \text{rg}(N(T), G)$.

Теорема 11. Если $D(T) = E_1 \times E_2$ и оператор T управляем из $E_1 \times E_2$ в E_3 , то для управляемости оператора $\tilde{T}$ из $E_1 \times E_2$ в E_3 необходимо и достаточно, чтобы $\text{rg}(H, N(T)) = 0$, где H — прямое дополнение G .

Всесоюзный научно-исследовательский институт
по охране вод
Харьков

Поступило
8 X 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Т. Като, Теория возмущений линейных операторов, М., 1972. ² С. Г. Крейн, Линейные уравнения в банаховом пространстве, М., 1971. ³ Ю. К. Ландо, Дифференциальные уравнения, т. 4, 6, 1112 (1968). ⁴ Ю. К. Ландо, там же, т. 10, 3, 531 (1974).