

Член-корреспондент АН СССР М. М. ЛАВРЕНТЬЕВ, В. Р. КИРЕЙТОВ

О ТОЧКАХ ВЕТВЛЕНИЯ ОПТИЧЕСКИХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

При восстановлении формы предмета стереоскопическим методом исходят из двух фотоизображений F_1, F_2 этого предмета, сделанных из двух разных точек q_1, q_2 пространства над ним. Затем производится операция идентификации фотоизображений F_1, F_2 , при которой на фотоизображениях отмечаются пары точек, соответствующие одной и той же точке поверхности предмета.

Указанная операция выполняется, как правило, визуально, с помощью стереоскопических приборов, позволяющих по двум фотоизображениям воссоздать объемную картину исследуемой области предмета; стереоскопическое рассматривание облегчает работу идентификатора, но не устраняет наиболее трудоемкую ее часть — сам процесс идентификации, производимый самим человеком.

В последнее время делались попытки облегчить решение этой задачи на базе теории распознавания образов.

После того, как идентификация фотоизображений F_1, F_2 произведена для достаточно густой сетки точек, координаты точек поверхности предмета определяются из элементарных геометрических соображений, если известны точки q_1, q_2 .

В публикуемой статье и статье ⁽¹⁾ авторы приводят некоторые математические результаты, связанные с возможностью восстановления формы предмета по его фотоизображениям без предварительной идентификации последних, но, быть может, с использованием более чем двух фотоизображений.

Определения и обозначения. Всюду далее E^n — вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 2$ со скалярным произведением $\langle x, y \rangle$. Сформулируем ряд определений. Полная проекционная схема (п.с.) $\mathcal{F}$ определяется в E^n заданием следующих объектов:

- а) точки q — объектив $\mathcal{F}$;
- б) линейного многообразия размерности $n-1$, называемого экраном $\mathcal{E}$ п.с. $\mathcal{F}$;
- в) открытой выпуклой области W экрана $\mathcal{E}$, называемой эффективной областью п.с. $\mathcal{F}$;
- г) функции $D(p, w)$, определенной для любых точек $p \in E^n$ и $w \in \mathcal{E}$; функция $D(p, w)$ называется фильтрацией п.с. $\mathcal{F}$.

Для указанных объектов должны выполняться следующие условия:

- 1) точка q не принадлежит $\mathcal{E}$; тогда расстояние Φ точки q до множества $\mathcal{E}$ положительно;
- 2) W содержит точку пересечения с экраном $\mathcal{E}$ прямой, проходящей через точку q ортогонально экрану $\mathcal{E}$; эта точка называется центром экрана $\mathcal{E}$.

Коротко можно записать, что п.с. $\mathcal{F} = \{q, \mathcal{E}, W, D\}$, где объекты указанного набора определены в а) — г) и для них выполнены условия 1), 2).

Полупространство, ограниченное гиперплоскостью, проходящей через объектив q п.с. $\mathcal{F}$ параллельно экрану $\mathcal{E}$ и не содержащее экрана $\mathcal{E}$, будем называть положительной областью п.с. $\mathcal{F}$ и обозначать символом $\mathcal{F}_+$. Единичный вектор, ортогональный экрану $\mathcal{E}$ п.с. $\mathcal{F}$ и направленный из q в допустимую область $\mathcal{F}_+$, называется нормалью п.с. $\mathcal{F}$. Если $p \in \mathcal{F}_+$, то геометрическим изображением $\mathcal{F}(p)$ точки p

на п.с. $\mathcal{F}$ называется точка пересечения с экраном $\mathcal{E}$ прямой, проходящей через точку p и объектив q . Множество всех точек из $\mathcal{F}_+$, изображения которых лежат в эффективной области W , назовем допустимой областью п.с. $\mathcal{F}$. П.с. $\mathcal{F} = \{q, \mathcal{E}, W, D\}$ называется изопланатической, если $D(p, w) = c(p, q) / \|q - p\|^{n-1} \Delta(w - \mathcal{F}(p))$ для любой точки p из допустимой области п.с. $\mathcal{F}$; п.с. называется δ -образной, если $D(p, w) = c(p, q) / \|q - p\|^{n-1} \delta(w - \mathcal{F}(p))$, где $c(p, q)$ — некоторая, вообще говоря, комплекснозначная функция, определенная для любых точек $p, q \in E^n$, отличная от 0 при $p \neq q$; будем называть функцию такого вида *весовой*, $\delta(\cdot)$ — δ -функция Дирака.

Пусть M^{n-1} — замкнутая гиперповерхность пространства E^n ; ограниченную и неограниченную (в смысле метрики на E^n) компоненты связности множества $E^n \setminus M^{n-1}$ обозначим символами M_-^{n-1} , M_+^{n-1} соответственно.

Скажем, что из точки $q \in M_+^{n-1}$ видно точку $p \in M^{n-1}$, если отрезок $[p, q]$, соединяющий точки p и q , не пересекается с множеством M_-^{n-1} .

Областью наблюдения точки $q \in M_+^{n-1}$ назовем множество $\alpha_M(q)$ всех точек гиперповерхности M^{n-1} , видимых из точки q .

Если M^{n-1} — замкнутая гиперповерхность, то п.с. $\mathcal{F} = \{q, \mathcal{E}, W, D\}$ называется нормально расположенной относительно M , если часть M_W гиперповерхности M , видимая из точки q и лежащая в допустимой области п.с. $\mathcal{F}$, лежит внутри (в смысле топологии на M) множества $\alpha_M(q)$. Оптической гиперповерхностью в E^n называется пара (M, A) , состоящая из замкнутой гиперповерхности M^{n-1} и, вообще говоря, комплекснозначной функции $A(p, t)$ переменных $p \in E^n$ и $t \in [0, 1]$, не обращающаяся в нуль нигде на M . Функция $A(p, t)$ называется яркостью оптической поверхности (M, A) ; если $p \in M$, $q \in M_+$ и в точке p определена внешняя нормаль к M , то значение функции $A(p, \langle q - p, v_p \rangle / \|q - p\|)$ называется яркостью (M, A) в точке p в направлении точки q , здесь v_p — внешняя нормаль к M в точке p , $\|q - p\|$ — норма вектора $q - p$.

Если яркость оптической гиперповерхности (M, A) в каждой точке $p \in M$ не зависит от направления (от выбора точки $q \in M_+$), то (M, A) назовем *ламбертовой оптической гиперповерхностью* (л.о.г.).

Пусть (M, A) — оптическая поверхность и $\mathcal{F} = \{q, \mathcal{E}, W, D\}$ — п.с., нормально расположенная относительно M ; будем предполагать, что часть M_W гиперповерхности M всюду обладает непрерывно меняющейся по M_W внешней нормалью v_p . $\mathcal{F}$ -изображением пары (M, A) называется функция $J(w)$, определенная для любой точки $w \in \mathcal{E}$ и вычисляемая по формуле

$$J(w) = \int_{M_W} A(p, \cos \varphi) \cdot \cos \varphi \cdot D(p, w) dS_p. \quad (1)$$

Для обозначения зависимости J от п.с. $\mathcal{F}$ будем функцию $J(w)$ писать иногда в виде $J(w, \mathcal{F})$.

Ограничимся рассмотрением л.о.г. и δ -образных п.с., расположенных нормально относительно рассматриваемой оптической гиперповерхности. Пусть (M, A) — л.о.г., $\mathcal{F}_i = \{q_i, \mathcal{E}_i, W_i, D_i\}$ $i=1, 2$ — две п.с., для которых $M_{W_1} \cap M_{W_2}$ непусто; пусть

$$J_i(w_i) = J(w_i, \mathcal{F}_i), \quad i=1, 2.$$

Лемма 1. Для всех точек $p \in M_{W_1} \cap M_{W_2}$ выполнено соотношение

$$\frac{J_1(\mathcal{F}_1(p))}{J_2(\mathcal{F}_2(p))} = \frac{c_1(p, q_1) \cos^n \psi_1(p)}{c_2(p, q_2) \cos^n \psi_2(p)}, \quad (2)$$

где ψ_i — угол между векторами v_i и $p - q_i$, $i=1, 2$, v_i — нормаль п.с. $\mathcal{F}_i$.

Точку $q \in E^n$, $q \notin M$ назовем сопровождающей для ситуации $\{(M, A), \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\}$, если она лежит в общей допустимой области п.с. $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ и для нее выполнено соотношение

$$\frac{J_1(\mathcal{F}_1(q))}{J_2(\mathcal{F}_2(q))} = \frac{c_1(q, q_1)}{c_2(q, q_2)} \frac{\cos^n \psi_1(q)}{\cos^n \psi_2(q)},$$

где $\psi_i(q)$ — угол между векторами v_i и $q - q_i$, $i=1, 2$.

Лемма 2. Точка q является сопровождающей для ситуации $\{(M, A), \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2\}$, если и только если

$$\frac{c_1(p_1, q_1)}{c_1(q, q_1)} A(p_1) = \frac{c_2(p_2, q_2)}{c_2(q, q_2)} A(p_2),$$

где p_1, p_2 — точки пересечений с множеством $M_{w_1} \cap M_{w_2}$ прямых, проходящих через точку q и объективы q_1, q_2 соответственно.

По-прежнему (M, A) — л.о.г. Пусть $q_1, q_2 \in M_+$ и $c(p, q)$ — весовая функция на E^n .

Точка $p_0 \in M$ называется точкой ветвления оптической гиперповерхности (M, A) относительно набора $\{q_1, q_2, c_1(p, q), c_2(p, q)\}$, если $p_0 \in \text{int } \alpha(q_1) \cap \text{int } \alpha(q_2)$ и в любой окрестности точки p_0 на гиперповерхности M существует пара точек $p_1, p_2 \in U$, $p_1 \neq p_2$, лежащих в одной плоскости с точками q_1, q_2 , для которых

$$A(p_1) \frac{c_1(p_1, q_1)}{c_1(p, q_1)} = A(p_2) \frac{c_2(p_2, q_2)}{c_2(p, q_2)},$$

здесь p — точка пересечения отрезков $[p_1, q_1]$ и $[p_2, q_2]$.

В предположении, что $c_i(p, q) = c_i(\|p - q\|)$, $i=1, 2$, где $c_i(t)$ — не обращающаяся в 0 при $t > 0$ комплекснозначная функция, справедлива

Теорема 1. Если p_0 — точка ветвления л.о.г. (M, A) относительно набора $\{q_1, q_2, c_1(p, q), c_2(p, q)\}$, то

$$dA(p_0, h) = A(p_0) \left(\frac{c_2'(\|p_0 - q_2\|)}{c_2(\|p_0 - q_2\|)} \langle T_1, v_{p_0} \rangle - \right. \\ \left. - \frac{c_1'(\|p_0 - q_1\|)}{c_1(\|p_0 - q_1\|)} \langle T_2, v_{p_0} \rangle \frac{1}{\|\langle v_{p_0}, T_1 \rangle T_2 - \langle v_{p_0}, T_2 \rangle T_1\|} \right), \\ T_i = \frac{p_0 - q_i}{\|p_0 - q_i\|}, \quad i=1, 2,$$

где $dA(p_0, h)$ — значение дифференциала функции A в p_0 в направлении единичного вектора h , касательного к M в p_0 и лежащего в плоскости точек q_1, q_2, p , а $c_i' = dc_i/dt$.

Если (M, A) — оптическая поверхность, то набор точек $q_1, q_2, \dots, q_n$ назовем достаточным для области $U \subseteq M^{n-1}$, если векторы $p - q_1, p - q_2, \dots, p - q_n$ линейно независимы для каждой точки $p \in U$.

Теорема 2. Если $c_i(\|p - q\|) = \text{const}$ и набор объективов $q_1, q_2, \dots, q_n$, нормально расположенных относительно (M, A) п.с. $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n$ соответственно, является достаточным для множества $U = \bigcap_{i=1}^n M_{w_i}$, то в области U

всякая точка ветвления оптической поверхности (M, A) относительно каждого набора $\{q_i, q_j, c_i(p, q), c_j(p, q)\}$ является критической точкой яркости A .

Теорема 3. Всякий достаточный набор точек $q_1, q_2, \dots, q_n$, являющихся объективами п.с. $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n$ соответственно, с весовой функцией $c(p, q)$ определяет на области $U = \bigcap_{i=1}^n M_{w_i}$ векторное поле

$\xi(q_1, q_2, \dots, q_n)$ такое, что если точка $p \in U$ является точкой ветвления (M, A) относительно всякого набора $\{q_i, q_j, c(p, q)\}$, то $\text{grad } A$ в точке p коллинеарен этому полю. Указанное поле ξ равно 0 везде на M , если $c(p, q) = \text{const}$.

Утверждения 4–5 переносятся на случай изопланатической п.с. с финитной фильтрацией D .

Теорема 4. Если $c(p, q) = \text{const}$ и функция A оптической гиперповерхности (M, A) обладает лишь конечным числом критических точек на M^{n-1} , то для любого достаточного набора точек $q_1, q_2, \dots, q_n$ часть $U = \bigcap_{i=1}^n M_{w_i}$ гиперповерхности M однозначно определяется заданием F -образов $J(w_i, \mathcal{F}_i)$, $i=1, 2, \dots$, и какой-либо точки $p \in U$.

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
25 XI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. М. Лаврентьев, В. Р. Кирейтов, ДАН, т. 216, № 2 (1974).