

УДК 519.35

МАТЕМАТИКА

Е. С. ЛЕВИТИН

ОБ УСЛОВИЯХ ЛОКАЛЬНОГО МИНИМУМА В ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 10 VII 1974)

1. Пусть E — линейное метрическое пространство с метрикой $\rho(u, \tilde{u})$, инвариантной относительно сдвигов, M — некоторое множество в E , $F_i(u)$, $i=0, 1, \dots, k, k+1, \dots, l$, — вещественные функционалы на M . Требуется минимизировать $F_0(u)$ на множестве $Q = \{u \in M; F_i(u) \leq 0, i=1, \dots, k, F_i(u) = 0, i=k+1, \dots, l\}$. Эту задачу будем в дальнейшем называть основной задачей. Пусть точка $u^0 \in Q$ исследуется на локальный минимум. Без ограничения общности можно считать, что $F_0(u^0) = 0$, так как всегда можно перейти от $F_0(u)$ к функционалу $F_0(u) - F_0(u^0)$.

Скажем, что в точке u^0 выполнено сильнейшее необходимое условие локального минимума (или, коротко, s -необходимость), если не существует последовательности $\delta u^n \rightarrow 0$ такой, что

$$F_i(u^0 + \delta u^n) < 0, i=0, 1, \dots, k, \quad F_i(u^0 + \delta u^n) = 0, i=k+1, \dots, l, \quad (u^0 + \delta u^n) \in M.$$

Скажем, что в точке u^0 выполнено слабейшее достаточное условие локального минимума (или, коротко, s -достаточность), если не существует последовательности $\delta u^n \rightarrow 0$ такой, что $F_0(u^0 + \delta u^n) \leq 0$, $(u^0 + \delta u^n) \in Q$, т. е. если u^0 — точка строгого локального минимума.

Пусть $\gamma(\delta u)$ — вещественный функционал, заданный на множестве $M - u^0 = \{\delta u \in E: \delta u = u - u^0, u \in M\}$, причем $\gamma(0) = 0$, $\gamma(\delta u) > 0$ при $\delta u \neq 0$, $\gamma(\delta u)$ непрерывен в точке $\delta u = 0$. Скажем, что в точке u^0 выполнена γ -необходимость, если при любом $C > 0$ для задачи минимизации функционала $F_0(u^0 + \delta u) + C\gamma(\delta u)$ при ограничениях

$$F_i(u^0 + \delta u) + C\gamma(\delta u) \leq 0, i=1, \dots, k, \quad F_i(u^0 + \delta u) = 0, i=k+1, \dots, l, \quad (u^0 + \delta u) \in M,$$

в точке $\delta u = 0$ выполнена s -необходимость. Если при некотором $C < 0$ в этой же задаче $\delta u = 0$ доставляет строгий локальный минимум, то будем говорить, что в точке u^0 выполнена γ -достаточность. Для основной задачи γ -необходимость является необходимым условием локального минимума, а γ -достаточность гарантирует строгий локальный минимум в точке u^0 .

Понятия s -условий и γ -условий были введены в ^(1, 2) для случая, когда E — банахово пространство, $M = E$, а ограничения типа равенства могут задаваться и бесконечномерным оператором. Однако даже если E — банахово пространство, результаты ^(1, 2) нельзя применить к рассматриваемой здесь задаче из-за ограничения $u \in M$, которое может быть очень «плохим», если его задавать аналитически (см. ниже пример 2; в нем множество $U(t)$ не обязано быть связным). В настоящей статье получены критерии s -условий и γ -условий, обобщающие аналогичные результаты из ^(1, 2) на линейные метрические пространства и на случай, когда среди всех ограничений выделено одно, не заданное функционально. Это обобщение основано на предлагаемом нами понятии тонкой выпуклой аппроксимации всей задачи в точке u^0 .

2. Ниже везде предполагается, что если $1 \leq i \leq k$, $F_i(u^0) < 0$, то функционал $F_i(u)$ полунепрерывен сверху на множестве M в точке u^0 . Обозначим $I(u^0) = \{0 \leq i \leq k: F_i(u^0) = 0\}$, $J(u^0) = I(u^0) \cup \{k+1, \dots, l\}$. Пусть $d > 0$ — достаточно малое число. Для любого $u \in M$ обозначим через $M_d(u) = \{\bar{u}: (u + \bar{u}) \in M, \rho(\bar{u}, 0) \leq d\}$. Совокупность функционалов $\{\Phi_i[\delta u](\bar{u})\}_{i \in J(u^0)}$, зависящих при каждом фиксированном $\delta u \in M_d(u^0)$ от вариации $\bar{u} \in M_d(u^0 + \delta u)$, назовем тонкой аппроксимацией основной задачи в точке u^0 , если для всех $i \in J(u^0)$

$$F_i(u^0 + \delta u + \bar{u}) = \Phi_i[\delta u](\bar{u}) + \xi_i(\delta u, \bar{u})\rho(u, 0),$$

где $\xi_i(\delta u, \bar{u}) \rightarrow 0$ при $\delta u, \bar{u} \rightarrow 0$, функционалы $\Phi_i[\delta u](\bar{u}) \rightarrow 0$ при $\delta u, \bar{u} \rightarrow 0$ и $\exists L_i > 0$ такие, что

$$|\Phi_i[\delta u](\bar{u}^1) - \Phi_i[\delta u](\bar{u}^2)| \leq L_i \rho(\bar{u}^1, \bar{u}^2) \\ \forall \delta u \in M_d(u^0), \bar{u}^1, \bar{u}^2 \in M_d(u^0 + \delta u).$$

Тонкую аппроксимацию основной задачи в точке u^0 назовем выпуклой, если замыкание множества

$$D[\delta u] = \{y \in R^{|J(u^0)|}, \tau \in R^1: \exists \bar{u} \in M - (u^0 + \delta u) \text{ такое, что} \\ \tau \geq \rho(\bar{u}, 0), y_i \geq \Phi_i[\delta u](\bar{u}), \quad i \in I(u^0), \quad y_i = \Phi_i[\delta u](0), \quad i = k+1, \dots, l\}$$

выпукло в $R^{|J(u^0)|+1}$ при каждом $\delta u \in M_d(u^0)$.

Пусть $F(u)$ — вещественный функционал в нормированном пространстве E , $u^0 \in E$. Скажем, что в точке u^0 функционал $F(u)$ допускает тонкую выпуклую аппроксимацию, если существуют окрестность $S(u^0)$ точки u^0 и функционал $\Phi[\delta u](\bar{u})$, определенный для любых $\delta u \in S(u^0)$, $\bar{u} \in E$, выпуклый по $\bar{u}$, такие, что:

- а) функционал $\Phi[\delta u](\bar{u})$ непрерывен в точке $\delta u = 0, \bar{u} = 0$,
- б) $F(u^0 + \delta u + \bar{u}) = \Phi[\delta u](\bar{u}) + \xi(\delta u, \bar{u}) \cdot \|\bar{u}\|$, где $\xi \rightarrow 0$ при $\delta u, \bar{u} \rightarrow 0$.

Класс функционалов, допускающих в точке тонкую выпуклую аппроксимацию, оказывается весьма широким, и из этого класса не выводит большинство локальных выпуклых операций. Приведем теперь примеры задач, допускающих в точке тонкую выпуклую аппроксимацию.

Пример 1 (задача математического программирования в нормированном пространстве). Пусть E — нормированное пространство, M — выпуклое множество в E , $F_i(u)$, $i = 0, 1, \dots, l$, — некоторые вещественные функционалы в E , причем в точке $u^0 \in Q$ функционалы $F_i(u)$ для $i \in I(u^0)$ допускают тонкую выпуклую аппроксимацию, а для $i = k+1, \dots, l$ непрерывно дифференцируемы (по Фреше). Тогда основная задача допускает в точке u^0 тонкую выпуклую аппроксимацию.

Пример 2 (задача оптимального управления). Пусть E — пространство измеримых на $[0, T]$ r -мерных вектор-функций $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))$, для которых

$$\text{vrai max}_{t \in [0, T]} |u(t)| < \infty, \quad \rho(u, \tilde{u}) = \int_0^T |u(t) - \tilde{u}(t)|_E dt,$$

$M = \{u \in E: u(t) \in U(t) \text{ при п.в. } t \in [0, T]\}$, где $U(t)$ при каждом $t \in [0, T]$ есть некоторое множество в r -мерном евклидовом пространстве E^r , $U(t)$ равномерно по t ограничены. Далее, пусть

$$F_i(u) = \int_0^T \mathcal{F}_i(x_i[u], u(t), t) dt + g_i(x_T[u]), \quad i = 0, 1, \dots, k, k+1, \dots, l,$$

где $x_i[u]$ — траектория в момент времени t следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad 0 \leq t \leq T,$$

с начальным условием $x(0) = a$: здесь $x = (x_1, \dots, x_m)$, $f = (f_1, \dots, f_m)$, функции $\mathcal{F}_i(x, u, t)$, $g_i(x)$, $f(x, u, t)$ непрерывны по совокупности своих переменных, непрерывно дифференцируемы по x и удовлетворяют по u условию Липшица на каждом шаре в $E^m \times E^r \times E^1$. Положим

$$\Phi_i[\delta u](\bar{u}) = F_i(u^0 + \delta u) + \int_0^T [H_i(x_i[u^0 + \delta u], \psi^{(i)}(t), u^0(t) + \delta u(t), t) - \\ - H_i(x_i[u^0 + \delta u], \psi^{(i)}(t), u^0(t) + \delta u(t) - \bar{u}(t), t)] dt,$$

где $H_i(x, \psi^{(i)}, u, t) = -\mathcal{F}_i(x, u, t) + (\psi^{(i)}, f(x, u, t))$, $\psi^{(i)}(T) = -g_{ix}(x_T(u))$,

$$\frac{d}{dt} \psi^{(i)}(t) = -f_x^*(x_i[u^0], u^0(t), t) \psi^{(i)}(t) + \mathcal{F}_{ix}(x_i[u^0], u^0(t), t).$$

Нетрудно показать, что $\{\Phi_i[\delta u](\bar{u})\}$ образуют тонкую аппроксимацию основной задачи в точке u^0 и, вследствие известной теоремы Ляпунова о выпуклости образа векторных интегралов, эта аппроксимация при любом фиксированном δu является выпуклой.

3. Сформулируем теперь основные предположения, при которых будет рассматриваться основная задача.

I. Основная задача в точке $u^0 \in Q$ допускает тонкую выпуклую аппроксимацию $\{\Phi_i[\delta u](\bar{u})\}_{i \in J(u^0)}$.

II. Тонкая выпуклая аппроксимация при $\delta u = 0$ является невырожденной аппроксимацией ограничений типа равенств, т. е. множество $W = \{(w_1, \dots, w_{l-k}) \in R^{l-k}: \exists \bar{u} \in M - u^0 \text{ такое, что } w_i = \Phi_{h+i}[0](\bar{u}), i = 1, \dots, l-k\}$ содержит в себе некоторый шар с центром в нуле.

III. Ограничения типа равенств $u \in \mathcal{R}$, где $\mathcal{R} = \{u \in M: F_i(u) = 0, i = k+1, \dots, l\}$, являются невырожденными в точке u^0 , т. е. существуют такие $\varepsilon > 0$, $K > 0$, что для любого $g \in E$, для которого $(u^0 + g) \in M$, $\rho(g, 0) \leq \varepsilon$, справедлива следующая оценка расстояния до множества $\mathcal{R}$:

$$\text{dis}(u^0 + g, \mathcal{R}) = \inf_{u \in \mathcal{R}} \rho(u^0 + g, u) \leq K \sum_{i=k+1}^l |F_i(u^0 + g)|.$$

Отметим, что в примерах 1, 2, если тонкая выпуклая аппроксимация при $\delta u = 0$ является невырожденной аппроксимацией равенств, то и сами ограничения типа равенств являются невырожденными в точке u^0 , т. е. в примерах 1, 2 условие III вытекает из условий I, II.

4. Для любых $\delta u \in M - u^0$, $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_l) \in R^{l+1}$ обозначим

$$L(u^0 + \delta u, \alpha) = \sum_{i=0}^l \alpha_i F_i(u^0 + \delta u).$$

Далее, пусть Ω_0 есть совокупность векторов $\alpha \in R^{l+1}$ таких, что $\alpha_i \geq 0$ для $i = 0, 1, \dots, k$, $\alpha_i F_i(u^0) = 0$ для $i = 1, \dots, k$,

$$\sum_{i=0}^l \alpha_i \Phi_i[0](\bar{u}) \geq 0 \quad \forall \bar{u} \in M - u^0, \quad \sum_{i=0}^k \alpha_i = 1.$$

Заметим, что условие $\Omega_0 \neq \emptyset$ есть первого порядка необходимое условие локального минимума в точке u^0 ; в частности, в задаче оптимального уп-

равления (пример 2) это условие эквивалентно принципу максимума Понтрягина. Точку $u^0 \in Q$, для которой множество $\Omega_0 \neq \emptyset$, назовем стационарной точкой исходной задачи. Если множество $\Omega_0 \neq \emptyset$, то положим

$$\mathcal{L}(u^0 + \delta u) = \sup_{\alpha \in \Omega_0} L(u^0 + \delta u, \alpha).$$

Наконец, пусть

$$\sigma(u^0 + \delta u) = \sum_{i=0}^k F_i^+(u^0 + \delta u) + \sum_{i=k+1}^l |F_i(u^0 + \delta u)|,$$

где $F_i^+ = \max[F_i, 0]$.

Теорема 1. Для основной задачи в точке u^0 s -необходимость выполнена тогда и только тогда, когда $\Omega_0 \neq \emptyset$ и при каждом $\eta > 0$ функционал $\mathcal{L}(u^0 + \delta u) + \eta \sigma(u^0 + \delta u)$ достигает на множестве $M - u^0$ локальный минимум в точке $\delta u = 0$.

Назовем точку u^0 регулярной точкой ограничений $u \in Q$, если существует такая точка $\bar{u} \in M - u^0$, что $\Phi_i[0](\bar{u}) < 0$, если $1 \leq i \leq k$, $F_i(u^0) = 0$ и $\Phi_i[0](\bar{u}) = 0$, если $i = k+1, \dots, l$. Условие регулярности ограничений в стационарной точке u^0 эквивалентно тому, что $\alpha_0 \geq a > 0 \forall \alpha \in \Omega_0$. Из теоремы 1 легко следует, что если точка u^0 регулярна, то для нее понятия s -необходимости и локального минимума совпадают.

Теорема 2. Для основной задачи в точке u^0 s -достаточность выполнена тогда и только тогда, когда $\Omega_0 \neq \emptyset$ и при каждом $\eta > 0$ функционал $\mathcal{L}(u^0 + \delta u) + \eta \sigma(u^0 + \delta u)$ достигает на множестве $M - u^0$ строгий локальный минимум при $\delta u = 0$.

5. Приведем теперь критерий γ -необходимости и γ -достаточности. Скажем, что функционал $\gamma(\delta u)$ допускает в точке $\delta u = 0$ тонкую аппроксимацию, если $\gamma(\delta u + \bar{u}) = \gamma(\delta u) + \xi_r(\delta u, \bar{u})\rho(\bar{u}, 0)$, где $\xi_r(\delta u, \bar{u}) \rightarrow 0$ при $\delta u, \bar{u} \rightarrow 0$. Если E — нормированное пространство, то при любом $\varepsilon > 0$ функционал $\gamma(\delta u) = \|\delta u\|^{1+\varepsilon}$ допускает в нуле тонкую аппроксимацию.

Пусть функционал $\gamma(\delta u)$ допускает в точке $\delta u = 0$ тонкую аппроксимацию, u^0 — стационарная точка. Обозначим

$$C = \lim_{\eta \rightarrow +0} \lim_{\substack{\delta u \rightarrow 0 \\ \delta u \in M - u^0, \delta u \neq 0}} \frac{\mathcal{L}(u^0 + \delta u) + \eta \sigma(u^0 + \delta u)}{\gamma(\delta u)}.$$

Тогда справедлива

Теорема 3. Для основной задачи в точке u^0 γ -необходимость эквивалентна условиям $\Omega_0 \neq \emptyset$, $C \geq 0$, а γ -достаточность — условиям $\Omega_0 \neq \emptyset$, $C > 0$.

Автор благодарит А. А. Милютину за обсуждение результатов.

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Поступило
10 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Е. С. Левитин, А. А. Милютин, Н. П. Осмоловский, ДАН, т. 240, № 5 (1973).
- ² Е. С. Левитин, А. А. Милютин, Н. П. Осмоловский, В сборн. Математическая экономика и функциональный анализ, М., «Наука», 1974, стр. 139.