

УДК 517.5

МАТЕМАТИКА

В. П. ОРЛОВ, П. Е. СОБОЛЕВСКИЙ

О РЕЗОЛВЕНТЕ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ ОПЕРАТОРА В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 9 IX 1974)

В настоящей работе продолжается начатое в ⁽¹⁾ изучение вырождающихся дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с неограниченным операторным коэффициентом. Исследуется оператор $\mathcal{L}_0$, порожденный дифференциальным выражением

$$l_0 v(x) = a(x) [a(x) v'(x)]' - b(x) v'(x) - Av(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (1)$$

на функциях, определенных на $[0, 1]$, со значениями в произвольном банаховом пространстве E , удовлетворяющих условию $v(1) = 0$; здесь $a(x)$, $a'(x)$ и $b(x)$ — непрерывные скалярные функции, $a(x) > 0$ при $x > 0$ и $\int_0^1 ds/a(s) = +\infty$, т. е. оператор $\mathcal{L}_0$ вырождающийся (сингулярный) оператор; A — сильно позитивный оператор, т. е. его область определения $D(A)$ плотна в E и справедливо неравенство

$$\|(A + \lambda I)^{-1}\| + \|A(A + \lambda I)^{-1}\| \leq C, \quad \operatorname{Re} \lambda \geq \sigma_0,$$

где C не зависит от λ . Таким образом, $\mathcal{L}_0$ — это вырождающийся эллиптический оператор.

Оператор $\mathcal{L}_0$ изучается в различных пространствах $F = F([0, 1]; E)$ функций, определенных на $[0, 1]$ со значениями в E . Его область определения состоит из таких функций $v(x) \in F$, что функции $a(x) [a(x) v'(x)]'$, $b(x) v'(x)$ и $Av(x)$ также принадлежат F . Устанавливается сильная позитивность оператора $-\mathcal{L}_0$ (или его замыкания $-\overline{\mathcal{L}}_0$), что позволяет, в частности, исследовать разрешимость смешанных задач для параболических уравнений с вырождающимся эллиптическим оператором.

1°. Рассмотрим оператор $\mathcal{L}_0$ в пространстве C_{01}^α (см. ⁽²⁾) функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с весом и обращающихся в нуль при $x = 1$.

Теорема 1. Пусть функция $b(x)a^{-1}(x)$ принадлежит C_{01}^α , где $\alpha \in (0, 1)$. Пусть при некоторых $n_1 > 0$, $n_2 > 0$, $M \geq 0$ и любых $0 \leq x \leq y \leq 1$ справедливы неравенства

$$a(x) \leq n_1 a(y), \quad \int_x^y ds/a(s) \geq n_2 [\ln a(y) - \ln a(x)] - M.$$

Тогда существует такое $\sigma > 0$, что при всех λ с $\operatorname{Re} \lambda \geq \sigma$ уравнение

$$\mathcal{L}_0 v(x) - \lambda v(x) = f(x)$$

разрешимо в C_{01}^α и справедливо неравенство

$$\|a(x) [a(x) v'(x)]'\|_{C_{01}^\alpha} + \|b(x) v'(x)\|_{C_{01}^\alpha} + \|(A + \lambda I)v(x)\|_{C_{01}^\alpha} \leq K \|f\|_{C_{01}^\alpha}, \quad (2)$$

причем K не зависит ни от f , ни от λ .

Теорема 1, в частности, означает, что оператор $-\mathcal{L}_0$ сильно позитивен в C_{01}^α . Для доказательства вначале изучается вырождающийся оператор

в дивергентной форме. С помощью теории аналитических полугрупп и дробных степеней операторов (см., например, ⁽³⁾) строятся решения соответствующих задач. Для установления коэзитивных оценок оказалось существенным получение равномерных по λ оценок полугрупп $\exp\{-x(A+\lambda I)^{1/2}\}$. Для изучения же общего вырождающегося оператора применяются интерполяционные неравенства в весовых нормах. Отметим, что в случае, когда A слабо позитивен (см. ⁽³⁾), утверждение теоремы справедливо лишь при $\lambda \geq \sigma$. Отметим также, что в качестве $a(x)$ могут быть взяты, например, функции x^β при $\beta \geq 1$, $\exp(-x^{-\beta})$ при $\beta > 0$ и др.

2°. Перейдем к рассмотрению оператора $\mathcal{L}_0$ в пространствах Вохнера $B_p([0, 1]; E)$ (см., например, ⁽⁴⁾): Наряду с вырождающимся оператором $\mathcal{L}_0$ рассмотрим невырождающийся оператор $\mathcal{L}$, порожденный дифференциальным выражением

$$lu(x) = u''(x) - Au(x),$$

определенным на функциях $u(x)$, заданных на полуоси $(-\infty, 0]$, удовлетворяющих условию $u(0) = 0$ и таких, что $u''(x)$ и $Au(x)$ принадлежат $B_p((-\infty, 0]; E)$.

Теорема 2. Пусть выполняются следующие условия:

1) При некоторых $\sigma_1 \geq 0$ и $p_0 \in (1, \infty)$ уравнение

$$\mathcal{L}u(x) - \sigma_1 u(x) = \varphi(x)$$

однозначно разрешимо при любой $\varphi(x) \in B_{p_0}((-\infty, 0]; E)$ и справедливо неравенство

$$\|u''(x)\|_{B_{p_0}} + \|Au(x)\|_{B_{p_0}} + \|u(x)\|_{B_{p_0}} \leq K_0 \|\varphi\|_{B_{p_0}},$$

где K_0 не зависит от φ .

2) Существует непрерывная на $[0, 1]$ функция $\rho(x)$, удовлетворяющая при некоторых $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $c_3 > 0$ и любых $0 \leq x \leq y \leq 1$ неравенствам

$$c_1 a(x) \leq \rho(x) \leq c_2 a(x),$$

$$\rho(x) \leq c_3 \rho(y), \quad |\rho^{1/p_0}(y) \rho^{-1/p_0}(x) - 1| \leq \omega_{p_0} \left(\int_x^y ds/a(s) \right),$$

где $\omega_{p_0}(s) \geq 0$ при $s \geq 0$ и справедливо соотношение

$$\int_0^\infty \exp\{-\delta s\} \omega_{p_0}(s) ds / s < +\infty$$

при некотором $\delta > 0$.

3) Пусть функция $b(x)a^{-1}(x)$ ограничена на $[0, 1]$. Пусть при некотором $c_4 > 0$ и любых $0 \leq x \leq y \leq 1$ справедливо неравенство

$$\int_x^y d(s)/a(s) \geq c_4 [\ln a(y) - \ln a(x)].$$

Тогда существует такое $\sigma > 0$, что при всех λ с $\operatorname{Re} \lambda \geq \sigma$ уравнение

$$\mathcal{L}_0 v(x) - \lambda v(x) = f(x)$$

разрешимо при любой $f \in B_{p_0}([0, 1]; E)$ и справедливо неравенство

$$\|a(x)[a(x)v'(x)]'\|_{B_{p_0}} + \|b(x)v'(x)\|_{B_{p_0}} + \|(A + \lambda I)v(x)\|_{B_{p_0}} \leq K \|f\|_{B_{p_0}}, \quad (3)$$

где K не зависит ни от f , ни от λ .

Доказательство проводится путем сведения задачи на отрезке к задаче на полуоси в специальном весовом пространстве. В случае, когда A слабо позитивен, утверждение теоремы верно лишь при $\lambda \geq \sigma$.

Возникает вопрос, когда имеет место условие 1 теоремы 2. С помощью одного результата из ⁽⁴⁾ устанавливается следующая экстраполяционная

Теорема 3. Пусть при некотором $p_0 \in (1, \infty)$ выполнено условие 1 теоремы 2.

Тогда это условие (с заменой σ_1 на достаточно большое $\sigma_2 > 0$) выполнено в любом B_p при $p \in (1, \infty)$.

Например, если пространство E гильбертово, то условие 1 выполнено при $p_0=2$, а, тем самым, и при любом $p \in (1, \infty)$. Аналогичные рассуждения, касающиеся параболических уравнений, см. в (6).

Наконец, приведем теорему, устанавливающую сильную позитивность замыкания $-\overline{\mathcal{L}}$ оператора $-\mathcal{L}_0$ при существенно меньших ограничениях, чем в теореме 2.

Теорема 4. Пусть при некоторых $c_5 > 0$, $c_6 > 0$, $\delta_1 > 0$ и любых $0 \leq x \leq y \leq 1$ выполнены неравенства

$$a(x) \leq c_5 a(y), \quad a(y) a^{-1}(x) \leq c_6 \exp \left\{ \delta_1 \int_x^y ds/a(s) \right\}.$$

Пусть функция $b(x) a^{-1}(x)$ ограничена на $[0, 1]$.

Тогда при любом $p \in (1, \infty)$ оператор $-\mathcal{L}_0$ допускает замыкание до сильно позитивного в V_p оператора $-\overline{\mathcal{L}_0}$.

Отметим, что теорема 4 справедлива и без выполнения условия 1 теоремы 2. Однако неясно, справедливо ли в условиях теоремы 4 неравенство (3).

3°. Установленная выше сильная позитивность оператора $\mathcal{L}_0$ (или его замыкания $-\overline{\mathcal{L}_0}$) в функциональных пространствах F позволяет изучать регулярные и сингулярные параболические уравнения с вырождающимся эллиптическим оператором (см. (1) и (6)). Рассмотрим, например, следующую задачу Коши

$$u'(t) - \overline{\mathcal{L}_0} u(t) = \varphi(t), \quad 0 \leq t \leq 1; \quad (4)$$

$$u(0) = u_0, \quad (5)$$

где u_0 — заданный элемент из F .

По пространству F определим функциональное пространство $C_0^3([0, 1]; F)$ (см. (6)). Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда для любой функции $\varphi(t) \in C_0^3$ и для любого $u_0 \in D(\overline{\mathcal{L}_0})$ существует единственное решение $u(t)$ задачи (4), (5) и справедливо неравенство

$$\|u'(t)\|_{C_0^3} + \|\mathcal{L}_0 u(t)\|_{C_0^3} \leq K(\|\varphi\|_{C_0^3} + \|\overline{\mathcal{L}_0} u_0\|_F),$$

где K не зависит ни от φ , ни от u_0 .

Если же выполнены условия теорем 1 или 2, то оператор $-\mathcal{L}_0$ замкнут в соответствующем пространстве F и справедливо более точное неравенство

$$\begin{aligned} \|u'_t(t, x)\|_{C_0^3} + \|a(x)[a(x)u'_x(t, x)]_x\|_{C_0^3} + \|b(x)u'_x(t, x)\|_{C_0^3} + \|Au(t, x)\|_{C_0^3} \leq \\ \leq K(\|\varphi\|_{C_0^3} + \|\mathcal{L}_0 u_0\|_F), \end{aligned}$$

где K не зависит ни от φ , ни от u_0 .

4°. К дифференциальным уравнениям в банаховом пространстве, как известно, могут быть сведены краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. Отметим в этой связи работу (7), посвященную изучению резольвенты вырождающегося эллиптического оператора второго порядка и соответствующего параболического уравнения. Приведенные выше результаты позволяют, в частности, выделить некоторый класс таких задач, для которых справедлива коэрцитивная разрешимость.

Воронежский государственный университет
им. Ленинского комсомола

Поступило
20 VII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ П. Е. Соболевский, ДАН, т. 196, № 2 (1971). ² П. Е. Соболевский, Дифференциальные уравнения, т. 4, № 7 (1968). ³ М. А. Красносельский и др., Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, «Наука», 1966. ⁴ Э. Хилле, Р. Филлипс, Функциональный анализ и полугруппы, М., 1962. ⁵ A. Benedek, A. P. Calderon, R. Panzone, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., v. 48, № 3 (1962). ⁶ П. Е. Соболевский, ДАН, т. 157, № 1 (1964). ⁷ В. П. Глушко, ДАН, т. 207, № 2 (1972).