

УДК 513.6

МАТЕМАТИКА

Академик АН БССР В. П. ПЛАТОНОВ

О ПРОБЛЕМЕ ТАННАКА — АРТИНА

Пусть A — простая конечномерная алгебра с центром K , $\text{Nrd}_{A/K}: A \rightarrow K$ — приведенная норма A (см. ^(1, 2)); $S(A) = \{a \in A \mid \text{Nrd}_{A/K}(a) = 1\}$, $A^{(1)} = [A^*, A^*]$ — коммутант мультипликативной группы A^* . Очевидно, что $A^{(1)} \subseteq S(A)$.

Следующая очень естественная проблема была поставлена независимо Таннака и Артином в 1943 г. (см. ^(3, 4)): будет ли $S(A) = A^{(1)}$? Так как $A = L(n, D)$, где D — тело с центром K , то нетрудно показать, что $S(A) = \text{SL}(n, D) = A^{(1)} \iff S(D) = D^{(1)}$. В частности, из результатов Дьедонне о некоммутативном определителе (см. ⁽⁵⁾) следует эквивалентность проблемы Таннака — Артина каждому из двух следующих утверждений: 1) при $n > 1$ фактор-группа группы $\text{SL}(n, D)$ по центру является простой; 2) $\text{SL}(n, D)$ при $n > 1$ порождается унипотентными элементами. Позднее, в 1963 г. Кнезер и Титс высказали общую гипотезу о том, что для простой односвязной K -изотропной алгебраической группы G группа $G_h / C(G_h)$, где $C(G_h)$ — центр G_h , является простой абстрактной группой (см. ⁽⁷⁻¹⁰⁾). Еще позже, в 1968 г. в связи с развитием алгебраической K -теории Басс в числе двух важнейших проблем (⁽¹¹⁾, стр. 222) сформулировал проблему Таннака — Артина следующим образом: будет ли всегда $SK_1(A) = 0$?

Сложилось довольно сильное мнение, что все эти проблемы и гипотезы должны иметь положительное решение, хотя, несмотря на усилия многих математиков, с тех пор, как Накаяма и Мацусима ⁽³⁾ для поля $K = \mathbb{F}$ -адических чисел, а Ванг ⁽⁴⁾ для поля алгебраических чисел показали, что $S(A) = A^{(1)}$, до последнего времени не было никакого прогресса в проблеме Таннака — Артина. Были еще две работы Кодама ⁽¹²⁾, в которых утверждалось положительное решение проблемы Таннака — Артина, но они оказались ошибочными.

Цель настоящей статьи — показать, что проблема Таннака — Артина имеет отрицательное решение, причем равенство $S(A) = A^{(1)}$ является скорее исключением, нежели правилом. Следовательно, общая гипотеза Кнезера — Титса и проблема из ⁽¹¹⁾ также имеют отрицательное решение. При этом весьма существенно, что почти полностью выясняется механизм отрицательного решения проблемы и выявляются глубокие связи проблемы Таннака — Артина с теорией полей классов и арифметикой вообще, позволяющие вычислять группу $SK_1(A) = S(A) / A^{(1)}$.

Как уже отмечалось выше, все сводится к тому случаю, когда A — тело. Далее, так как A есть тензорное произведение тел взаимно простых индексов, то достаточно ограничиться такими телами A , что $[A : K] = p^m$, где p — простое число. Для тел A простого индекса Вангом ⁽⁴⁾ доказано, что $S(A) = A^{(1)}$. Но уже для тел индекса 4, т. е. $[A : K] = 16$, проблему решить не удавалось. Оказывается, этот случай выпукло отражает общую ситуацию.

Пусть p, r — различные простые числа, Q — поле рациональных чисел; Q_p, O_p — соответственно поле и кольцо целых p -адических чисел; $K(x, y)$ — поле рациональных функций, $K\langle x, y \rangle$ — поле, а $K[[x, y]]$ — кольцо формальных степенных рядов от x, y над K . Через $T(a, b)$ обозначим алгебру кватернионов над K , обычным образом соответствующую паре (a, b) . Через (α/β) обозначается символ Лежандра.

Основная теорема. Пусть $A = T(x, 2) \otimes_{Q(x, y)} T(y, 3)$, Тогда $S(A) = A^{(1)}$; более того, если $\tilde{A} = A \otimes_{Q(x, y)} Q\langle x, y \rangle$, $\tilde{\tilde{A}} = A \otimes_{Q(x, y)} Q_3\langle x, y \rangle$, то $S(A) \neq \tilde{\tilde{A}}^{(1)}$, в частности, $S(\tilde{A}) \neq \tilde{A}^{(1)}$, $S(\tilde{\tilde{A}}) \neq \tilde{\tilde{A}}^{(1)}$.

Более общо: пусть $A(p, 3) = T(x, p) \otimes_{Q(x, y)} T(y, 3)$, где $(p/3) = -1$, $\tilde{A}(p, 3) = A(p, 3) \otimes_{Q(x, y)} Q\langle x, y \rangle$, $\tilde{\tilde{A}}(p, 3) = A(p, 3) \otimes_{Q(x, y)} Q_3\langle x, y \rangle$; тогда $S\tilde{\tilde{A}}(p, 3) \neq \tilde{\tilde{A}}^{(1)}(p, 3)$ и при $p=2$ или $p \equiv 1 \pmod{8}$ $SA(p, 3) \neq \tilde{\tilde{A}}^{(1)}(p, 3)$.

Замечание. Условие $p \equiv 1 \pmod{8}$, фигурирующее в основной теореме, так же как и поле 3-адических чисел Q_3 в действительности введены для большей прозрачности рассуждений. В процессе доказательства будет видно, что можно построить соответствующие примеры с произвольным Q_p .

Замечание 2. Аналогично могут быть построены тела A произвольных индексов, для которых $S(A) \neq A^{(1)}$, однако доказательства заметно усложняются, так как необходимо использовать арифметику куммеровых расширений, в частности, свойства символа норменного вычета.

Замечание 3. Случай тела $A(2, 3)$ специально выделен в основной теореме, так как для него рассуждения особенно наглядны. Разумеется, все результаты для двух переменных x, y распространяются на большее число переменных.

Доказательство основной теоремы базируется на арифметических свойствах квадратичных расширений, а также свойствах ветвления тел и реализуется в виде следующих лемм.

Лемма 1. Пусть p и r — различные простые числа, тогда $\tilde{A}(p, r) = T(x, p) \otimes_{Q(x, y)} T(y, r)$ является телом; если к тому же $(p/r) = -1$, то $\tilde{\tilde{A}}(p, r) = T(x, p) \otimes_{Q_r(x, y)} T(y, r)$ является телом.

Доказательство леммы 1 сводится к вопросу о представимости нуля формой $f = xx_1^2 + px_2^2 - px_3^2 - yy_1^2 - ry_2^2 + ry_3^2$ (см. (1), стр. 293).

Если D — тело над дискретно нормированным полем K , то O_D обозначает кольцо целых элементов D (см. (13, 14)). Пусть $\tilde{\Omega}(p, r) = Q(p^{1/2}, r^{1/2})$, $\tilde{\tilde{\Omega}}(p, r) = Q_r(p^{1/2}, r^{1/2})$.

Лемма 2. Если $(p/r) = -1$, то при $r \neq 2$ кольцо

$$O_{\tilde{\tilde{\Omega}}(p, r)} = O_r + O_r p^{1/2} + O_r r^{1/2} + O_r (pr)^{1/2}.$$

Для конечного расширения Δ поля K через $N_{\Delta/K}$ обозначается норма Δ над K .

Лемма 3. $2 + 3^{1/2} \in N_{\tilde{\tilde{\Omega}}(2, 3)/Q(3^{1/2})}(\tilde{\tilde{\Omega}}(2, 3))$, в частности,

$$N_{\tilde{\tilde{\Omega}}(2, 3)/Q(3^{1/2})}(1 + 3^{1/2} + 1/2 \cdot 2^{1/2} + 1/2 \cdot 6^{1/2}) = 2 + 3^{1/2}.$$

Лемма 4. $N_{\tilde{\tilde{\Omega}}(2, 3)/Q_3(3^{1/2})}(\tilde{\tilde{\Omega}}(2, 3)) \supset Q_3$.

Доказательство вытекает из того, что $[Q_3^*: N_{Q_3(2^{1/2})/Q_3}(Q_3^*)] = 2$, символ Гильберта $(3; 2)_3 = (2/3) = -1$ (см. (15), стр. 80) и $N_{\tilde{\tilde{\Omega}}(2, 3)/Q_3(3^{1/2})}(3^{1/2}) = 3$.

Так как $N_{Q_3(3^{1/2})/Q_3}(2 + 3^{1/2}) = 1$, то по теореме 90 Гильберта $2 + 3^{1/2} = b\sigma(b)^{-1}$, где $\sigma: \alpha + \beta \cdot 3^{1/2} \rightarrow \alpha - \beta \cdot 3^{1/2}$, а произвольное b имеет вид $(3 + 3^{1/2})t$, где $t \in Q_3^*$.

Лемма 5. Для всякого $t \in Q_3^*$ элемент $(3 + 3^{1/2})t \notin N_{\tilde{\tilde{\Omega}}(p, 3)/Q_3(3^{1/2})}(\tilde{\tilde{\Omega}}(p, 3))$ при $(p/3) = -1$.

Достаточно доказать, что при $\delta = z_1 + y_1 3^{1/2} + z_2 p^{1/2} + y_2 (3p)^{1/2}$, где $z_i, y_i \in O_3$, $N(\delta) = z_1^2 + 3y_1^2 - p(z_1^2 + 3y_2^2) + (2y_1 z_1 - 2p z_2 y_2) \cdot 3^{1/2} \neq 3 + 3^{1/2}$.

Лемма 6. Пусть $(p/3) = -1$ и $p \equiv 1 \pmod{8}$ при $p \neq 2$. Тогда $(2 + 3^{1/2}) \in N_{\tilde{\tilde{\Omega}}(p, 3)/Q(3^{1/2})}(\tilde{\tilde{\Omega}}(p, 3))$.

Для доказательства применяем теорему Хассе о нормах в циклических расширениях и вычисление символа Гильберта $(a, b)_v$ для квадратичных расширений локальных полей (см. (13), гл. XIII).

Лемма 7. Пусть $(p/3) = -1$, тогда $(2+3^{1/2}) \in N_{\tilde{\Omega}(p, 3)/Q_3(3^{1/2})}(\tilde{\Omega}(p, 3))$.

Доказательство для $p=2$ следует из леммы 3. В общем случае применим обобщенную теорему Гензеля ((¹⁶), стр. 285) для системы двух квадратичных форм с ненулевым редуцированным якобианом.

Лемма 8. Если $O_{\tilde{A}(p, r)}$ — кольцо целых элементов $\tilde{A}(p, r)$ относительно поля формальных степенных рядов $O\langle x \rangle \langle y \rangle$ переменной y с полем констант $Q\langle x \rangle$, $\mathfrak{A}_{(p, r)}$ — простой идеал $O_{\tilde{A}(p, r)}$, то $O_{\tilde{A}(p, r)}/\mathfrak{A}_{(p, r)} \simeq T(x, p) \otimes_{Q\langle x \rangle} Q(3^{1/2})\langle x \rangle$.

Доказательство вытекает из того факта, что индекс ветвления $\tilde{A}(p, r)$ (см. (¹³), гл. XII) равен 2.

Лемма 9. Пусть $\tilde{D}(p, r) = T(x, p) \otimes_{Q\langle x \rangle} Q(3^{1/2})\langle x \rangle$ и при $(p/3) = -1$ $\tilde{\tilde{D}}(p, 3) = T(x, p) \otimes_{Q_3(3^{1/2})} Q_3(3^{1/2})\langle x \rangle$. Тогда

$$O_{\tilde{D}(p, r)}/\mathfrak{A}_{\tilde{D}(p, r)} \cong \tilde{\Omega}(p, r) = Q(p^{1/2}, r^{1/2}),$$

$$O_{\tilde{\tilde{D}}(p, 3)}/\mathfrak{A}_{\tilde{\tilde{D}}(p, 3)} \cong \tilde{\tilde{\Omega}}(p, 3) = Q_3(p^{1/2}, 3^{1/2}).$$

Лемма 10. Пусть $(p/3) = -1$, тогда в обозначениях леммы 9 $(2+3^{1/2}) \in \text{Nrd}_{\tilde{\tilde{D}}(p, 3)/Q_3(3^{1/2})}(\tilde{\tilde{D}}(p, 3))$, а при $p=2$ или $p \equiv 1 \pmod{8}$ $(2+3^{1/2}) \in \text{Nrd}_{\tilde{\tilde{D}}(p, 3)/Q_3(3^{1/2})}(\tilde{\tilde{D}}(p, 3))$.

Для доказательства применяются леммы 3, 6, 9.

Лемма 11. Пусть $t \in (Q_3\langle x \rangle)^*$, тогда

$$(3 + 3^{1/2})t \notin \text{Nrd}_{\tilde{\tilde{D}}(p, 3)/Q_3(3^{1/2})}(\tilde{\tilde{D}}(p, 3)).$$

Можно считать, не ограничивая общности, что $t \in Q_3[[x]]$. Если $\text{Nrd}_{\tilde{\tilde{D}}(p, 3)/Q_3(3^{1/2})}(\delta) = (3+3^{1/2})t$, то $\delta \in O_{\tilde{\tilde{D}}(p, 3)}$. Пусть δ содержится в максимальном подполе F тела $\tilde{\tilde{D}}(p, 3)$. Тогда либо F неразветвлено, либо вполне разветвлено. В неразветвленном случае $\text{Nrd}(\delta) = N_{F/Q_3(3^{1/2})}(\delta) = (3+3^{1/2})t \Rightarrow N_{F/Q_3(3^{1/2})}(\delta) = N_{\tilde{\tilde{\Omega}}(p, 3)/Q_3(3^{1/2})}(\delta) = (3+3^{1/2})\bar{t}$, где черта означает образ по модулю $\mathfrak{A}_{\tilde{\tilde{D}}(p, 3)}$. Если $\bar{t} \neq 0$, то из лемм 5 и 9 получается противоречие. Нетрудно видеть, что всегда существует такое t , что $\bar{t} \neq 0$. Если же F вполне разветвлено над $Q_3(3^{1/2})\langle x \rangle$, то

$$\overline{N_{F/Q_3(3^{1/2})}(\delta)} = (N_{\tilde{\tilde{\Omega}}(p, 3)/Q_3(3^{1/2})}(\bar{\delta}))^2 = (3 + 3^{1/2})\bar{t},$$

где $\bar{t} \neq 0$.

Лемма 12. Существует такой элемент $\delta \in A(p, 3)$, что при $(p/3) = -1$ $\text{Nrd}_{\tilde{\tilde{D}}(p, 3)/Q_3\langle x, y \rangle}(\delta) = (2+3^{1/2})$ и $\text{Nrd}_{\tilde{\tilde{D}}(p, r)/Q\langle x, y \rangle}(\delta) = (2+3^{1/2})$, если $p=2$ или $p \equiv 1 \pmod{8}$; в частности, при $p=2$ в качестве δ можно взять $(1+3^{1/2}+1/2 \cdot 2^{1/2}+1/2 \cdot 6^{1/2})$.

Лемма 13. Пусть $\pi = y^{1/2}$, тогда π порождает в $\tilde{A}(p, 3)$ и $\tilde{\tilde{A}}(p, 3)$ внутренний автоморфизм второго порядка, который индуцирует на $O_{\tilde{A}(p, 3)}/\mathfrak{A}_{\tilde{A}(p, 3)}$ и $O_{\tilde{\tilde{A}}(p, 3)}/\mathfrak{A}_{\tilde{\tilde{A}}(p, 3)}$ соответственно автоморфизм $\bar{\varphi}$, φ , не тождественный на центре.

Лемма 14. Пусть $w \in \tilde{A}^{(1)}$ или $\tilde{\tilde{A}}^{(1)}$ при обычных условиях на p . Тогда $\text{Nrd}_{\tilde{\tilde{D}}(p, 3)/Q_3(3^{1/2})\langle x \rangle}(\bar{w}) = \theta \bar{\varphi}(\theta)^{-1}$, где $\theta \in \text{Nrd}_{\tilde{\tilde{D}}(p, 3)/Q_3(3^{1/2})\langle x \rangle}(\tilde{\tilde{D}}(p, 3))$ и аналогично $\text{Nrd}_{\tilde{\tilde{D}}(p, 3)/Q_3(3^{1/2})\langle x \rangle}(\bar{w}) = v \varphi(v)^{-1}$ ($\bar{w}$ и w обозначают вычеты по модулю простых идеалов).

Следующая лемма завершает доказательство основной теоремы.

Лемма 15. Пусть $\delta_0 \in S\tilde{\tilde{A}}(p, 3)$ при $(p/3) = -1$ и $\text{Nrd}_{\tilde{\tilde{D}}(p, 3)/Q_3(3^{1/2})\langle x \rangle}(\delta_0) = 2+3^{1/2}$ для вычета $\bar{\delta}_0$. Тогда $\delta_0 \notin \tilde{\tilde{A}}^{(1)}(p, 3)$; если $p=2$, то $(1+3^{1/2}+1/2 \cdot 2^{1/2}+1/2 \cdot 6^{1/2}) \notin \tilde{\tilde{A}}^{(1)}(2, 3)$.

Замечание 4. Бесклеточная серия контрпримеров, построенная в основной теореме, минимальна не только в смысле индекса, но и в смысле поля, как показывает следующее утверждение, доказанное совместно с В. И. Янчевским.

Предложение. Если поле K является полем формальных степенных рядов одной переменной, поле констант которого есть поле алгебраических чисел или локально-компактно, то $S(A) = A^{(1)}$.

Доказательство предложения использует некоторые рассуждения, примененные ранее к гипотезе Хардера ⁽¹⁷⁾, и основано на редукции к полю вычетов.

Здесь уместно охарактеризовать общую идею, сыгравшую важную роль в решении проблемы Таннака — Артина. Уже давно стало ясно, что довольно сложное доказательство теоремы Ванга для поля алгебраических чисел не отражает истинной природы результата. Но только недавно автору удалось найти короткое и идейно прозрачное доказательство теоремы Ванга под влиянием теоремы Янчевского о совпадении $S(A)$ и $A^{(1)}$ над C_2^0 -полямп. Оказалось, что все сводится к доказательству следующего утверждения: пусть D — тело с центром K , причем K является циклическим расширением простой степени подполя P , и пусть $a \in K$, $N_{K/P}(a) = 1$, $a \in \text{Nrd}_{D/K}(D)$; тогда существует такой элемент $b \in \text{Nrd}_{D/K}(D)$, что $a = h\sigma(b)^{-1}$, где σ — образующая $\text{Gal}(K/P)$. Если K — поле алгебраических чисел, то это утверждение доказывается довольно легко, с помощью теоремы Эйхлера о норме.

Автор благодарен В. И. Янчевскому за полезные обсуждения.

Институт математики
Академии наук БССР
Минск

Поступило
18 XII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Бурбаки, Алгебра: модули, кольца, формы, М., 1966. ² А. Вейль, Основы теории чисел, М., 1972. ³ Т. Nakayama, Y. Matsushima, Proc. Imper. Acad. Japan, v. 19, 21 (1943). ⁴ S. Wang, Am. J. Math., v. 72, № 2, 323 (1950). ⁵ Э. Артин, Геометрическая алгебра, М., 1969. ⁶ J. Tits, Ann. Math., v. 80, № 2, 313 (1964). ⁷ G. Har-der, Arch. Math., v. 19, № 5, 465 (1968). ⁸ В. П. Платонов, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 33, № 6, 1211 (1969). ⁹ В. П. Платонов, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 34, № 4, 775 (1970). ¹⁰ А. Borel, J. Tits, Ann. Math., v. 97, № 3, 499 (1973). ¹¹ Х. Басс, Алгебраическая K-теория, М., 1973. ¹² T. Kodama, Mem. Kyushu Univ., v. 10, № 2, 141 (1956); v. 14, № 2, 98 (1960). ¹³ J. P. Serre, Corps Locaux, Paris, 1962. ¹⁴ M. Deuring, Algebren, Berlin, 1968. ¹⁵ В. И. Борович, И. Р. Шафаревич, Теория чисел, М., 1964. ¹⁶ Н. Бурбаки, Коммутативная алгебра, М., 1971. ¹⁷ В. П. Платонов, В. И. Янчевский, О гипотезе Хардера, ДАН, т. 221, № 4 (1975).