

Ю. Ф. ПРОНОЗИН

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ БЫСТРОДЕЙСТВИЯХ

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 9 X 1974)

В теории непрерывных задач оптимального управления и, в частности, задач на быстродействие, весьма важным оказывается вопрос о свойствах гладкости функции Беллмана γ . Так, непрерывность и дифференцируемость функции γ важны (^{3, 4, 16, 20}) для метода динамического программирования Беллмана (¹). Непрерывность γ нужна для предложенного в (⁴) обоснования и обобщения этого метода. Условие Липшица функции γ нужно (²) для другого обобщения (^{2, 22}) метода Беллмана, а также полезно (¹⁷) для аппроксимации непрерывной задачи ее дискретным аналогом. В случае непрерывности γ принцип максимума Понтрягина (²⁰) оказывается достаточным условием оптимальности в линейных быстродействиях (⁵). Кроме того с непрерывностью функции γ связан (⁸) вопрос о корректности самой постановки задачи оптимального быстродействия.

Свойства гладкости функции γ изучались во многих работах, в частности, в (^{2, 5, 8, 10-14, 18-21}). Однако эти вопросы, в особенности для задач на быстродействие, оказались довольно трудными (^{3, 20}) и еще не получили своего должного решения, как это было сделано, например, для задачи аналитического конструирования регуляторов (¹⁵), для которой удалось установить гладкость функции γ и эффективно решить методом Беллмана проблему синтеза.

В настоящей заметке, примыкающей к упомянутым выше работам, рассматривается стандартная задача предельного быстродействия

$$\dot{z} = f(z, u), \quad z \in R, \quad u \in U \subset R, \quad (1)$$

или в линейном случае

$$\dot{z} = Az + u, \quad (2)$$

где R — евклидово пространство размерности $\dim R > 1$, U — компакт (область управления), A — линейный оператор из R в R , f — отображение из $R \times U$ в R . В качестве класса D допустимых управлений (²⁰) выбрано множество кусочно-непрерывных* функций $\mathcal{U}$, зависящих от времени t и принимающих значения из U . Цель управления системой (1) состоит в быстрейшем переводе ее из точек $z \in R$ на некоторое замкнутое выпуклое множество $M \subset R$.

Для этой задачи функция Беллмана (^{1, 20}) определяется формулой $\gamma(z) = \inf T(z, \mathcal{U})$, $\mathcal{U} \in D$, где $T(z, \mathcal{U})$ — время перехода системы (1) из точки $z \in R$ на M при воздействии управления $\mathcal{U}$ (если z на M не переходит, то полагаем $T(z, \mathcal{U}) = \infty$). Положим $G = \{z: \gamma(z) < \infty\}$ — область управляемости (³) задачи (1). Важной, но и весьма трудной проблемой в задаче быстродействия является так называемая проблема синтеза (^{1, 20}), состоящая в построении в форме обратной связи, т. е. в виде функции $\mathcal{U}: (G \setminus M) \rightarrow U$, управления, переводящего каждую точку $z \in G \setminus M$ на M за время, равное или близкое к $\gamma(z)$.

* Несколько отступая от принятой терминологии (²⁰), функцию $\mathcal{U}: [\alpha, \beta] \rightarrow U$ будем называть кусочно-непрерывной, если она непрерывна справа, а множество ее точек разрыва вполне упорядочено.

Ниже через $\gamma \in C(G)$, $\gamma \in C^1(G \setminus M)$, $\gamma \in C_{\mathcal{L}}(G)$ и $\gamma \in C_{\mathcal{L}}(G \setminus M)$ обозначены соответственно непрерывность функции γ на G , ее непрерывная дифференцируемость на $G \setminus M$ и ее локальная липшицевость на G и на $G \setminus M$ (подразумевается, что каждое из этих включений содержит в себе требование открытости множества G относительно R).

Далее, если $W \subset Q \subset R$, то $\text{int}_Q W$ означает внутренность W относительно Q , то W — выпуклое замыкание W , ∂W — границу W , $\rho(z, W)$ — расстояние от точки z до W . Через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и $\|\cdot\|$ обозначены скалярное произведение и норма в R ; $Z(z, \mathcal{U}, t)$ — траектория системы (1), соответствующая начальному условию $Z(z, \mathcal{U}, 0) = z$ и управлению $\mathcal{U}$.

1°. Рассмотрим нелинейную задачу (1). Предполагается, что f непрерывно на $R \times U$, локально липшицево по z с константой, не зависящей от u , и удовлетворяет на $R \times U$ условию $|\langle f(z, u), z \rangle| \leq C(1 + \|z\|^2)$ ⁽²³⁾.

В ⁽⁵⁾ было введено условие устойчивости множества M , которое можно записать в следующем, несколько обобщенном, виде.

Определение 1. В задаче (1) множество M называется почти устойчивым, если для любых $z \in M$, $T > 0$ и любого $\delta > 0$ найдется управление $\mathcal{U} \in D$ такое, что $\rho(Z(z, \mathcal{U}, t), M) \leq \delta$ при любом $t \in [0, T]$.

Отличие состоит лишь в том, что в ⁽⁵⁾ принималось $\delta = 0$. Заметим, что результаты, полученные в ⁽⁵⁾, остаются в силе при замене условия устойчивости на почти устойчивость множества M .

Сформулируем условия, позволяющие проверять множество M на почти устойчивость, а функцию γ на непрерывность и липшицевость.

Определение 2. Пусть в задаче (1) M выпукло. Будем говорить, что (f, U) слабо поглощает M , если для любого $z_0 \in \partial M$ и любого $q \in R \setminus \{0\}$ из $\min \langle z - z_0, q \rangle = 0$, $z \in M$, следует неравенство $\max \langle q, f(z_0, u) \rangle \geq 0$, $u \in U$. Если же это неравенство оказывается строгим, то будем говорить, что (f, U) поглощает M .

Утверждение 1. В задаче (1) с выпуклым M :

1) почти устойчивость множества M эквивалентна его слабой поглощаемости;

2) для $\gamma \in C(G)$ необходима слабая поглощаемость множества M ;

3) для $\gamma \in C_{\mathcal{L}}(G)$ необходимо и достаточно, чтобы (f, U) поглощало M .

Заметим, что устойчивость (в отличие от почти устойчивости) множества M не необходима для $\gamma \in C(G)$. В случае, когда $M = \{0\}$, п. 3) был получен в другой формулировке в ^(2, 19).

Следующее условие ⁽²¹⁾ выделяет широкий класс задач, в которых функция γ заведомо оказывается негладкой.

Определение 3. В задаче (1) с $M = \{0\}$ точку $u^* \in U$ будем называть угловой, если найдутся $q \in R$, $\|q\| = 1$, $\alpha > 0$ и шар S с центром в $z = 0$ такие, что

$$\langle f(z, u) - f(z, u^*), q \rangle \geq \alpha \|f(z, u) - f(z, u^*)\|$$

для всех $(u, z) \in U \times S$.

Заметим, что если $f(z, u) = f_1(z) + f_2(u)$ и $f_2(U)$ есть выпуклый многогранник, то каждая его вершина есть угловая точка.

Утверждение 2. Если в задаче (1) с $M = \{0\}$ множество U имеет хотя бы одну угловую точку, то $\gamma \notin C(G)$ или $\gamma \notin C^1(G \setminus M)$.

2°. Наиболее общее из известных нам достаточных условий непрерывности функции γ в линейной задаче (2) с $M = \{0\}$, а также с выпуклым M было получено в ⁽⁵⁾. Сформулируем связанное с этой работой более широкое достаточное условие, оказывающееся в некоторых важных случаях и необходимым.

Для $V \subset R$ через $P(V)$ обозначим пересечение всех гиперподпространств, опорных к $\text{co}V$ (если их нет, то $P(V) = R$), а через $\text{Ko}V$ — пересечение всех конусов с вершиной в точке $z = 0$, содержащих в себе $\text{co}V$.

Определение 4. Пусть в задаче (2) M выпукло и $z_0 \in \partial M$. Положим $\bar{M} = \text{Ko}(M - z_0)$, $\bar{A} = -A$, $U_0 = \text{Ko}(\bar{A}z_0 - U)$ и $P_0 = P(\bar{M} + U_0)$. Пусть для неко-

торого $i \geq 0$ уже построены U_i, P_i . Тогда положим $U_{i+1} = U_i + \bar{A}(U_i \cap P_i)$, $P_{i+1} = P(\bar{M} + U_{i+1})$. Будем говорить, что (A, U, M, z_0) порождает R , если $P_v = R$, где $v = \dim R - 1$, и что (A, U, M) порождает R , если (A, U, M, z_0) порождает R для любой крайней точки $z_0 \in \partial M$.

Теорема 1. В задаче (2) с выпуклым M для $\gamma \in C(G)$ достаточно, чтобы (A, U, M) порождало R . В каждом из следующих трех случаев это условие и необходимо: 1) $\dim R = 2$, 2) $M = \{0\}$, 3) U — многогранник.

3°. На примерах, взятых из (20), можно показать, что уравнение Беллмана (1), точнее его естественное обобщение (2, 22), заключающееся в замене в этом уравнении скалярного произведения $\langle \gamma'(z), f(z, u) \rangle$ на производную от γ по вектору $f(z, u)$, не отражает адекватным образом поведение функции γ в тех точках $z \in G \setminus M$, в окрестности которых она не липшицева. Поэтому представляет интерес следующее утверждение, существенно дополняющее п.3) утверждения 1.

Утверждение 3. В задаче (2) с выпуклым M для $[\gamma \in C(G)$ и $\gamma \in C_{\infty}(G \setminus M)]$ необходимо (и достаточно), чтобы (H, U) поглощало M .

Из утверждений 2, 3 как следствие вытекает, что функция γ не удовлетворяет накладываемым на нее методом Беллмана (1) условиям гладкости ($\gamma \in C(G)$ и $\gamma \in C^1(G \setminus M)$) в следующих задачах с $M = \{0\}$:

а) во всех линейных и нелинейных примерах из (3, 20); б) в задачах (1) с одним аддитивным скалярным управлением; в) в задачах (2), в которых U есть многогранник или же $0 \notin \text{int}_R \text{co } U$.

На примерах можно показать, что наличие «ребер» (по не угловых точкам) у U , разрывов у синтеза $\mathcal{U}$, а также отсутствие оптимальных кусочно-непрерывных управлений не всегда приводит к потере гладкости функции γ . С другой стороны, гладкость оптимального синтеза $\mathcal{U}$ на всем $R \setminus \{0\}$ еще не гарантирует гладкости функции γ .

4°. Сформулируем необходимое и достаточное условие гладкости функции γ в задаче (2) с выпуклым M . Для каждого $\psi \in R$ и $t \geq 0$ положим

$$V(\psi, t) = \{v \in U: \langle \psi, e^{tA}v \rangle = \max_{u \in U} \langle \psi, e^{tA}u \rangle\}.$$

Определение 5. Будем говорить, что объект (A, U, M) задачи (2) удовлетворяет условию ψ -единственности, если для всех $z \in \partial M$ и $\psi_1, \psi_2 \in R$ таких, что $\|\psi_1\| = \|\psi_2\| = 1$ и $\min \langle \psi_i, \tilde{z} - z \rangle = 0$, $\tilde{z} \in M$, из $V(\psi_1, t) \cap V(\psi_2, t) \neq \emptyset$ при любом достаточно малом t вытекает, что $\psi_1 = \psi_2$.

Теорема 2. В задаче (2) с выпуклым M для $[\gamma \in C(G)$ и $\gamma \in C^1(G \setminus M)]$ необходимо и достаточно, чтобы (A, U, M) удовлетворяло условию ψ -единственности, а (A, U) поглощало M .

Следствие. Если в задаче (2) M или $\text{co } U$ есть выпуклое тело с гладкой границей, то для $[\gamma \in C(G)$ и $\gamma \in C^1(G \setminus M)]$ необходимо и достаточно, чтобы объект (A, U) поглощал M .

Для случая, когда $M = \{0\}$, достаточная часть этого следствия была установлена другими способами в (11–13).

5°. Для линейной задачи (2) с $M = \{0\}$ сформулируем один способ выглаживания функции γ , что снимает известные математические трудности (20) применения классической формулировки метода динамического программирования Беллмана (1).

Пусть в задаче (2): а) $0 \in \text{co } U$ (допускается $0 \notin \text{int}_R \text{co } U$); б) $0 \in \text{int}_{t(1-\pi)R} (1-\pi) \text{co } U$, где π — ортогональный проектор из R на AR . Для б) достаточно неособенности оператора A ; в) пусть L — минимальное из подпространств в R , содержащих в себе U и инвариантных относительно A , а π_1 — ортогональный проектор из R на L . Условие в) состоит в том, чтобы сужение оператора $(1-\pi_1)A$ на $(1-\pi_1)R$ было асимптотически устойчиво. Для в) достаточны порознь невырожденность (5) объекта (A, U) и асимптотическая устойчивость оператора A .

Условия а) — в) малообременительны. Для них достаточно, но далеко не необходимо, например, чтобы $\gamma \in C(G)$.

Теорема 3. Пусть в задаче (2) с $M=\{0\}$ объект (A, U) удовлетворяет условиям а)–в). Тогда в любой окрестности точки $z=0$ можно построить такое множество (эллипсоид) $\bar{M}$, что замена в задаче (2) M на $\bar{M}$ приводит к новой задаче (A и U – те же), в которой функция $\bar{\gamma}$ оказывается заведомо гладкой, т. е. $\bar{\gamma} \in C(\bar{G})$ и $\bar{\gamma} \in C^1(\bar{G} \setminus \bar{M})$.

Обратно, если хотя бы одно из условий а)–в) нарушено, то функцию γ нельзя «выгладить» за счет лишь малых изменений множества M .

Доказательство этой теоремы основано на следствии к теореме 2, работе ⁽⁹⁾ и одной теореме Ляпунова ⁽⁶⁾, гл. X, задачи 72, 73).

Поскольку указанный в теореме 3 способ аппроксимации задачи (2), в отличие от рассмотренных в ^(2, 7, 11, 12, 14), никак не затрагивает объект (A, U) , то синтез аппроксимационной задачи есть приближенный синтез и для исходной задачи.

Для проверки условий утверждений 1–3 и теорем 1–3 и для построения указанного в теореме 3 эллипсоида $\bar{M}$ нужно знать лишь A и f и множества U и M ; исследовать же свойства и поведение отдельных траекторий управляемой системы (1) или (2) не требуется.

Проиллюстрируем применение теоремы 3 на следующей задаче:

$$\dot{z}_1 = z_2 + u_1, \quad \dot{z}_2 = u_2, \quad \dot{z}_3 = -z_3 + u_3, \quad M = \{0\}, \quad (3)$$

$$U = \{(u_1, u_2, u_3) : 0 \leq u_1 \leq 1, \quad |u_2| \leq u_1, \quad 0 \leq u_3 \leq 1\},$$

в которой $\text{int } t_R G \neq M$, функция γ и оптимальный синтез $\hat{u}$ терпят конечный разрыв на некоторых поверхностях, точка $z=0$ является угловой для U . Однако, заменяя в (3) $M=\{0\}$ на $\bar{M}(\varepsilon) = \{z : \|z - q(\varepsilon)\| \leq \varepsilon/4\}$, где $q(\varepsilon) = (0, -\varepsilon, 0)$, а ε – любое достаточно малое положительное число, приходим к новой задаче, в которой $\bar{G} = R$ и функция $\bar{\gamma}$ гладкая.

Автор с глубокой благодарностью вспоминает А. М. Летова, высказавшего полезные замечания при обсуждении этой работы.

Институт проблем управления
Москва

Поступило
16 IX 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Р. Беллман, Динамическое программирование, М., 1960. ² Ю. А. Белов, Уч. зап. Калинингр. ун-в., в. 1 (1968). ³ В. Г. Болтянский, Математические методы оптимального управления, «Наука», 1968. ⁴ В. Г. Болтянский, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 28, № 3 (1964). ⁵ В. Г. Болтянский, Дифференциальные уравнения, т. 5 (1963). ⁶ И. М. Глазман, Ю. И. Любич, Конечномерный линейный анализ, «Наука», 1969. ⁷ А. Я. Дубовицкий, В. А. Рубцов, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 8, № 5 (1968). ⁸ Ф. М. Кириллова, УМН, т. 17, в. 4 (1962). ⁹ Ф. М. Кириллова, ПММ, т. 25, в. 3 (1961). ¹⁰ В. И. Коробов, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 10, № 1 (1970). ¹¹ Н. Н. Красовский, ПММ, в. 4 (1959). ¹² Л. А. Кун, К теории линейных задач оптимального быстрого действия. Автореф. к кандидат. дисс., М., 1972. ¹³ Л. А. Кун, Ю. Ф. Пронозин, Техническая кибернетика, № 1–2 (1972). ¹⁴ Л. А. Кун, Ю. Ф. Пронозин, ДАН, т. 200, № 6 (1971). ¹⁵ А. М. Летова, Автоматика и телемеханика, т. 21, № 4–6 (1960); т. 22, № 4 (1961); т. 23, № 11 (1962). ¹⁶ Е. Ф. Мищенко, Некоторые вопросы оптимального управления и преследования. Вторая летняя математическая школа. 1, Киев, 1965. ¹⁷ П. Н. Моисеев, Численные методы в теории оптимальных систем, «Наука», 1971. ¹⁸ П. Н. Петров, Дифференциальные уравнения, т. 5, 1969. ¹⁹ Н. Н. Петров, ПММ, т. 34, № 5 (1970). ²⁰ Л. С. Понтрягин и др., Математическая теория оптимальных процессов, М., 1969. ²¹ Ю. Ф. Пронозин, Автоматика и телемеханика, № 12 (1972); № 1 (1973). ²² Р. П. Федоренко, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 7, № 5 (1967). ²³ А. Ф. Филиппов, Вестн. МГУ, сер. матем., мех., № 2 (1959).