

УДК 517.9

МАТЕМАТИКА

М. Н. ФЕЛЛЕР

О РАЗРЕШИМОСТИ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 10 VII 1974)

«Эллиптический» оператор второго порядка для функций на абстрактном гильбертовом пространстве определен нами в ⁽¹⁾. Разрешимость «эллиптических» уравнений с таким оператором в случае, соответствующем уравнениям с постоянными коэффициентами, изучалась в ⁽²⁾.

В настоящей статье рассматриваются вопросы однозначной разрешимости красной задачи для уравнений с эллиптическим оператором типа П. Леви в случае, соответствующем самосопряженным «эллиптическим» уравнениям (сам лапласиан Леви ⁽³⁾ формально самосопряжен). При этом, как и в ⁽²⁾, нам не требуются ограничения на области типа условий, приведенных в ⁽⁴⁻⁶⁾ для случая функций, определенных на пространстве функций.

Заметим, что бесконечномерные самосопряженные эллиптические операторы другого типа, не включающие симметризованный оператор Лапласа — Леви, рассматривались в ⁽⁷⁻¹⁰⁾.

1. Пусть H — сепарабельное вещественное гильбертово пространство, $H_{+1} \subset H_{\beta} \subset H_0 \subset H_{-1}$, $H_0 = H$, $\beta' \in (0, 1)$, — цепочка пространств из гильбертовой шкалы пространств $\{H_{\beta}\}$, $-\infty < \beta < \infty$, с порождающим оператором T таким, что $T^{-\beta'}$ и $T^{-1+\beta'}$ — операторы Гильберта — Шмидта $((x, y)_{H_{\beta}} \| = (T^{\beta}x, T^{\beta}y)_H, x, y \in H_{\beta})$.

Обозначим через $\mathfrak{M}\Phi$ среднее значение функции $\Phi(h)$ на H по сфере $\|h\|_{H_{-1}}^2 = 1$ (см. ⁽³⁾, стр. 247).

Введем в рассмотрение пространство $\Upsilon \subset H_{-1}$, $\Upsilon = \{y \in H_{-1} : \mathfrak{M}(\{\sqrt{y_1}, \dots, \sqrt{y_n}, \dots\}, h)_{H^2} = v, |v| < \infty \forall E \in H\}$, где E — базис в H , $h \in H_{+1}$, и рассмотрим фактор-пространство $\bar{\Upsilon} = \Upsilon / \Upsilon_0$, $\Upsilon_0 = \{y \in \Upsilon : \mathfrak{M}(\{\sqrt{y_1}, \dots, \sqrt{y_n}, \dots\}, h)_{H^2} = 0\}$, $(\bar{y}, \bar{z})_{\bar{\Upsilon}} = \langle y, z \rangle_{\Upsilon} = \mathfrak{M}(y, h)_H (z, h)_H$, $\bar{y}, \bar{z} \in \bar{\Upsilon}$, $y \in \bar{y}$, $z \in \bar{z}$ (см. ⁽²⁾).

Обозначим через $C^l\mathfrak{G}$ класс скалярных функций $U(x)$, l раз непрерывно дифференцируемых по Фреше в $\mathfrak{G} \subset H$, $\mathfrak{G}$ — ограниченная область пространства H_{β} с границей Γ , $C_0^1(\mathfrak{G})$ — подкласс класса $C^1(\mathfrak{G})$, состоящий из финитных функций, $C'(\mathfrak{G})$ — класс функций таких, что $U'(x) \in \bar{\Upsilon}$, $C'(\mathfrak{G}) \subset C^1(\mathfrak{G})$, $C''(\mathfrak{G})$ — таких, что «эллиптический» оператор $\mathcal{L}U(x)$ существует и не зависит от выбора базиса ⁽¹⁾, $C''(\mathfrak{G}) \subset C^2(\mathfrak{G})$,

$$\mathcal{L}U(x) \equiv \mathcal{L}(x, D)U(x) = \mathfrak{M}(-A(x)K_{U''}(x), h \otimes h)_{H \otimes H} + (a(x), U'(x))_H + \alpha(x)U(x), \quad (1)$$

$$\Delta < \mathcal{L}(x_0, D) < \Delta \quad \forall x_0 \in \mathfrak{G}, \quad (2)$$

где $\Delta U(x)$ — лапласиан Леви, $K_{U''} \in H_{-1} \otimes H_{-1}$, $K_{U''}$ — обобщенное ядро второй вариации функции U , $U''(x)$ — гессиан, а $U'(x)$ — градиент функции $U(x)$ в точке x , $A(x)$ — линейный ограниченный оператор в $H_{-1} \otimes H_{-1}$, $a(x) \in H_{+2-\beta'}$, $A(x)$, $a(x)$ зависят, вообще говоря, от x , $\alpha(x)$ — скалярная функция.

Пусть $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})$ — гильбертово пространство функций на $\mathfrak{G} \subset H$, интегрируемых с квадратом по гауссовой мере μ с корреляционным оператором T^{-2} и нулевым средним

$$\|U\|_{\mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})}^2 = \int_{\mathfrak{G}} U^2(x) \mu(dx).$$

Хорошо известно, что конечномерное дифференциальное формально самосопряженное эллиптическое выражение

$$\begin{aligned} L_c u(x_1, \dots, x_n) = & - \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \\ & + \sum_{l=1}^n a_l(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_l} + \alpha(x_1, \dots, x_n) u, \\ a_{jk} = & a_{kj}, \quad a_l = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a_{jl}}{\partial x_l}, \quad \alpha \geq 0, \end{aligned}$$

тесно связано с квадратичной положительно определенной формой

$$\int_{\mathfrak{G}} \left[\sum_{j,k=1}^n a_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} + \alpha u^2 \right] dx_1 \dots dx_n.$$

Поэтому естественно определить бесконечномерный оператор $\mathcal{L}_c$ в $\mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})$ как оператор, ассоциированный с формой

$$\begin{aligned} & \int_{\mathfrak{G}} [\mathfrak{M}(A(x)U' \otimes V', h \otimes h)_{H \otimes H} + \alpha(x)UV] \mu(dx), \\ & U, V \in C_0^\infty(\mathfrak{G}) \cap C''(\mathfrak{G}) \cap C'(\mathfrak{G}). \end{aligned}$$

Равенство, определяющее $\mathcal{L}_c$, имеет вид

$$(\mathcal{L}_c U, V)_{\mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})} = \int_{\mathfrak{G}} [\mathfrak{M}(A(x)U' \otimes V', h \otimes h)_{H \otimes H} + \alpha(x)UV] \mu(dx).$$

Интегрируя по частям и учитывая (1), получим, что

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_c U, V)_{\mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})} = & \int_{\mathfrak{G}} [\mathfrak{M}(-AK_{U'}, h \otimes h)_{H \otimes H} + (a, U')_H + aU + \\ & + \mathfrak{M}(AU' \otimes T^2 x, h \otimes h)_{H \otimes H}] V \mu(dx) = \\ = & (\mathcal{L}U + \mathfrak{M}(AU' \otimes T^2 x, h \otimes h)_{H \otimes H}, V)_{\mathfrak{L}_2(\mathfrak{G})}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\mathcal{L}_c U(x) = \mathcal{L}U(x) + \mathfrak{M}(A(x)U' \otimes T^2 x, h \otimes h)_{H \otimes H}, \quad (3)$$

где $\mathcal{L}$ такой, что

$$a_{jk}^{(N)} \equiv \sum_{i=1}^N (-Ae_j \otimes e_k, e_i \otimes e_i)_{H \otimes H} = a_{kj}^{(N)}, \quad a_l \equiv (a, e_l)_H = - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\partial a_{jl}}{\partial x_j},$$

$\alpha(x) \geq 0$, $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ — ортобазис из собственных векторов оператора T , нормированных в H , а функции $A(x)$, $a(x)$ и $\alpha(x)$ предполагаются непрерывными и достаточно гладкими.

В частности, при $A=E$ (E — единичный оператор), $\alpha=0$ имеем, что $\mathcal{L}=-\Delta$, а $\Delta_c U(x) = -\Delta U(x) + \mathfrak{M}\{(x, h)_{H+}, (U'(x), h)_H\}$.

В качестве области определения оператора $\mathcal{L}_c$ возьмем

$$\mathfrak{D}_{\mathcal{L}_c} = C_{0\infty}(\mathfrak{G}) \cap C''(\mathfrak{G}) \cap C'(\mathfrak{G}).$$

Лемма 1.

$$C \|U'(x)\|_F^2 \geq \mathfrak{M}(A(x)U' \otimes U', h \otimes h)_{H \otimes H} \geq c \|U'(x)\|_F^2, \quad C, c > 0, \quad x \in \mathfrak{G}. \quad (4)$$

Действительно, согласно (1), (2)

$$C_1 \int_{\mathfrak{G}} [\Delta U(y)]^2 \mu(dy) \geq \int_{\mathfrak{G}} [\mathcal{L}(x, D)U(y)]^2 \mu(dy) \geq \int_{\mathfrak{G}} [\Delta U(y)]^2 \mu(dy).$$

Отсюда, продолжив $U_p(y) = U(Py)$ нулем вне $\mathfrak{G} \cap R_N$ и воспользовавшись ее преобразованием Фурье $\tilde{U}_p(\xi)$, имеем

$$\frac{C_{1N}}{2N} \sum_{j=1}^N \xi_j^2 \geq \frac{1}{N} \sum_{j,h=1}^N a_{jh}^N(x) \xi_j \xi_h \geq \frac{C_{1N}}{2N} \sum_{j=1}^N \xi_j^2,$$

P — ортопроектор, $P = \sum_{h=1}^N y_h e_h$ на N -мерное подпространство R_N (см. (2), стр. 61). Полагая $\xi_j = (U', e_j)_H$ и переходя к пределу при $P \rightarrow E$, получим (4).

Обозначим теперь через $\mathfrak{W}_2^A(\mathfrak{G})$ пополнение $C'(\mathfrak{G})$ по норме

$$\|U\|_{\mathfrak{W}_2^A(\mathfrak{G})}^2 = \int_{\mathfrak{G}} [\mathfrak{M}(A(x)U'(x) \otimes U'(x), h \otimes h)_{H \otimes H} + \alpha(x)U^2(x)] \mu(dx),$$

$\mathfrak{W}_2^A(\mathfrak{G})$ — пополнение $C_0^1(\mathfrak{G}) \cap C'(\mathfrak{G})$ по этой норме, $\mathfrak{W}_2^A(\mathfrak{G}) \subset \mathfrak{W}_2^A(\mathfrak{G})$. При $A=E, \alpha=1$ $\mathfrak{W}_2^E(\mathfrak{G}) = \mathfrak{W}_2^A(\mathfrak{G})$ из (2).

2. Лемма 2. H_β имеет полную меру в H .

В самом деле, рассмотрим функцию $f_\nu(x) = \exp(-1/2\nu\|x\|_{H_\beta}^2)$, $\nu > 0$. При $\nu \rightarrow 0$ $f_\nu(x) \rightarrow \chi_{H_\beta}(x)$ — характеристической функции множества H_β ,

$$\mu(H_\beta) = \int_H \chi_{H_\beta}(x) \mu(dx) = \lim_{\nu \rightarrow 0} \left[\prod_{k=1}^{\infty} (1 - \nu \lambda_k^{-2+2\beta'}) \right]^{-1/2} = 1,$$

$$Te_k = \lambda_k e_k, \quad k=1, 2, \dots,$$

поскольку $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-2+2\beta'} = \text{Sp } T^{-2+2\beta'} < \infty$ по условию.

Лемма 3. Если $\mathfrak{G}$ — ограниченная область пространства H_β , то дифференциальное выражение (3) существует почти для всех $x \in \mathfrak{G}$, $U \in C_0^\infty(\mathfrak{G}) \cap C''(\mathfrak{G}) \cap C'(\mathfrak{G})$.

Действительно, $\mathcal{L}U(x)$ существует по условию (1). По обобщенному неравенству Коши — Буняковского и лемме 1 $|\mathfrak{M}(A(x)U' \otimes T^2x, h \otimes h)_{H \otimes H}| \leq C \|U'(x)\|_F \mathfrak{M}(x, h)_{H+1}^2$. Так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| \leq \|x\|_{H_\beta} \sqrt{\text{Sp } T^{-2\beta'}} < \infty$$

по условию, то $\{\sqrt{|x_1|}, \dots, \sqrt{|x_k|}, \dots\} \in H$. Как следует из (11) почти для всех таких элементов из H , а значит, по лемме 2 и почти для всех $x \in \mathfrak{G}$, имеем $|\mathfrak{M}(A(x)U' \otimes T^2x, h \otimes h)_{H \otimes H}| \leq \sqrt{3C} \|U'(x)\|_F$.

Лемма 4. Пусть $\mathfrak{G}$ — ограниченная область пространства H_β , а $3Rd < \|T^{-1}\|^{-\beta}$, где d — диаметр $\mathfrak{G}$, R — радиус наименьшего шара в H_β с центром в нуле, содержащего $\mathfrak{G}$.

Тогда справедливо неравенство

$$\|U\|_{\mathfrak{W}_2^A(\mathfrak{G})}^2 \leq K \int_{\mathfrak{G}} \|U'(x)\|_F^2 \mu(dx) \quad \forall U \in \mathfrak{W}_2^A(\mathfrak{G}) \quad (5)$$

(постоянная K не зависит от U , а только от $\mathfrak{G}$).

В самом деле, достаточно доказать (5) для $U \in C_0^1(\mathbb{G}) \cap C'(\mathbb{G})$. Пусть $a_i \leq x_i \leq b_i$, $|b_i - a_i| \leq d$, $i = 1, \dots, N$, — параллелепипед в котором расположена область $\mathbb{G} \cap R_N$. Продолжая $U_P(x)$ нулем вне $\mathbb{G} \cap R_N$, возводя в квадрат выражение

$$U_P(x) = \exp(1/4 \lambda_i^2 x_i^2) \int_{a_i}^{x_i} \left[\frac{\partial U_P(x)}{\partial x_i} - 1/2 x_i \lambda_i^2 U_P(x) \right] \exp(-1/4 \lambda_i^2 x_i^2) dx_i,$$

оценив его по неравенству Коши — Буяковского, проинтегрировав по $\mu_P(dx)$, учитывая, что $\mathbb{G} \subset H_P$, просуммировав по i от 1 до N , воспользовавшись тем, что почти для всех $x \in \mathbb{G}$ $\mathfrak{M}(x, h)_{H_{+1}}^2 = 3$, и, переходя к пределу при $P \rightarrow E$, получим (5) с $K = 2d^2(1 - 3Rd\|T^{-1}\|^2)^{-1}$.

Заметим, что в конечномерном случае неравенство типа (5) есть неравенство Фридрихса.

Теорема 1. *Оператор $\mathcal{L}_c$ имеет положительно определенное самосопряженное расширение в $\mathfrak{L}_2(\mathbb{G})$.*

Действительно, $\mathcal{L}_c$ — симметрический оператор, поскольку $\mathfrak{D}_{\mathcal{L}_c}$ плотна в $\mathfrak{L}_2(\mathbb{G})$, и, интегрируя по частям, имеем $\forall U, V \in \mathfrak{D}_{\mathcal{L}_c}$ $(\mathcal{L}_c U, V)_{\mathfrak{L}_2(\mathbb{G})} = (U, \mathcal{L}_c V)_{\mathfrak{L}_2(\mathbb{G})}$. Из лемм 1 и 4 следует, что оператор $\mathcal{L}_c$ положительно определенный. Как положительно определенный оператор, $\mathcal{L}_c$ допускает самосопряженное расширение с той же нижней гранью.

3. Функция $U \in \mathfrak{W}_2^A(\mathbb{G})$ называется обобщенным решением задачи Дирихле

$$\mathcal{L}_c U(x) = F(x) \quad \text{в } \mathbb{G}, \quad U|_{\Gamma} = G(x), \quad (6)$$

если при заданных $F \in \mathfrak{L}_2(\mathbb{G})$, $G \in \mathfrak{W}_2^A(\mathbb{G})$ справедливо соотношение

$$\int_{\mathbb{G}} [\mathfrak{M}(A(x)U'(x) \otimes V'(x), h \otimes h)_{H \otimes H} + \alpha(x)U(x)V(x)] \mu(dx) = (F, V)_{\mathfrak{L}_2(\mathbb{G})}$$

$$\forall V \in C_0^\infty(\mathbb{G}) \cap C''(\mathbb{G}) \cap C'(\mathbb{G}) \quad \text{и} \quad U - G \in \mathfrak{W}_2^A(\mathbb{G}).$$

Теорема 2. *Существует единственное обобщенное решение краевой задачи (6).*

Действительно, рассмотрим функционал $\Phi(V) = (F, V)_{\mathfrak{L}_2(\mathbb{G})} - (G, V)_{\mathfrak{W}_2^A(\mathbb{G})}$. Он ограничен и линеен в $\mathfrak{W}_2^A(\mathbb{G})$. По теореме Ф. Рисса о представлении линейных функционалов он реализуется в виде $\Phi(V) = (Z, V)_{\mathfrak{W}_2^A(\mathbb{G})}$, где элемент $Z \in \mathfrak{W}_2^A(\mathbb{G})$ однозначно определяется функционалом $\Phi(V)$. Отсюда $(Z + G, V)_{\mathfrak{W}_2^A(\mathbb{G})} = (F, V)_{\mathfrak{L}_2(\mathbb{G})}$, $U = Z + G$ — искомое решение.

Украинский научно-исследовательский
институт механической обработки древесины
Киев

Поступило
10 VII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. Н. Феллер, ДАН, т. 205, № 1, 36 (1972). ² М. Н. Феллер, ДАН, т. 214, № 1, 59 (1974). ³ P. Levy, Problemes concrets d'analyse fonctionnelle, Paris, 1951. ⁴ М. Н. Феллер, Доп. АН УРСР, № 12, 1558 (1965). ⁵ М. Н. Феллер, Доп. АН УРСР, № 4, 426 (1966). ⁶ М. Н. Феллер, ДАН, т. 172, № 6, 1282 (1967). ⁷ Ю. Л. Далецкий, УМН, т. 22, в. 4 (136), 3 (1967). ⁸ Y. Umetura, J. Math. Kyoto Univ., v. 4, № 3, 477 (1965). ⁹ T. Hida, Nagoya Math. J., v. 38, 13 (1970). ¹⁰ Ю. М. Березанский, Г. Ф. Ус, ДАН, т. 213, № 5, 1005 (1973). ¹¹ Г. Е. Шилов, Фан Дык Тинь, Интеграл, мера и производная на линейных пространствах, «Наука», 1967.