

УДК 517.946

МАТЕМАТИКА

В. И. ШЕВЧЕНКО

О СОВПАДЕНИИ ИНДЕКСОВ ЗАДАЧ ДИРИХЛЕ И НЕЙМАНА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 15 X 1974)

В этой статье мы покажем, что для эллиптических систем второго порядка с $n > 2$ независимыми переменными краевые задачи Дирихле и Неймана имеют одинаковый индекс, и в качестве следствия получим признаки фредгольмовости задачи Неймана. Хотя результат сформулирован для систем второго порядка, при естественном определении задачи Неймана он остается справедливым для эллиптических систем любого четного порядка.

Пусть конечная область G n -мерного евклидова пространства точек $x(x_1, \dots, x_n)$ ограничена бесконечно гладкой поверхностью S . Для равномерно эллиптической системы p уравнений

$$\mathfrak{A}\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)u = \sum_{k,j=1}^n A_{kj}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} + \dots = 0 \quad (1)$$

(точками обозначены члены младших порядков по u) с достаточно гладкими вещественными коэффициентами рассмотрим краевые задачи Дирихле

$$u|_S = f \quad (2)$$

и Неймана (ν — внутренняя нормаль)

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_S = g \quad (3)$$

в классических предположениях.

Известно, что в случае $p=2$, так же как для одного уравнения, задачи Дирихле и Неймана для системы (1) при $n > 2$ поставлены корректно и имеют нулевой индекс ^(1, 2). Однако, как показывает пример ⁽³⁾, уже для эллиптических систем трех уравнений задача Дирихле (а вместе с ней и задача Неймана ⁽⁴⁾), вообще говоря, не корректна. Поэтому при $p > 2$ для обеспечения нётеровости краевой задачи Дирихле необходимо потребовать * выполнение условия регуляризуемости Я. Б. Лопатинского ⁽⁵⁾: ранг матрицы **

$$\begin{aligned} & \int \{ \mathfrak{A}_0^{-1}(y, \lambda \nu + \tau), \lambda \mathfrak{A}_0^{-1}(y, \lambda \nu + \tau) \} d\lambda, \quad y \in S, \\ & + \end{aligned}$$

максимален. Всюду в дальнейшем оно предполагается выполненным. Но тогда условие регуляризуемости будет выполнено и для задачи Неймана, поскольку обе задачи регуляризуемы или нет одновременно ⁽⁴⁾, так что задача Неймана тоже будет нётеровой.

* Это ограничение на систему.

** τ — ненулевой касательный вектор к поверхности S в точке y , $\mathfrak{A}_0$ — старшая часть $\mathfrak{A}$.

Матрица $\mathfrak{A}_0(y, \lambda v + \tau) = A(\lambda)$ разлагается в произведение ^(6, 7):

$$A(\lambda) = \mathfrak{A}_0(y, v) A_-(\lambda) A_+(\lambda),$$

где $A_{\pm}(\lambda) = \lambda E - D_{\pm}(\tau)$ (E — единичная матрица) и все собственные значения матрицы $D_+(\tau)$ лежат в верхней полуплоскости. Тогда

$$\int_+ \lambda A^{-1}(\lambda) d\lambda = D_+(\tau) \int_+ A^{-1}(\lambda) d\lambda. \quad (4)$$

Из формулы (4) следует, что условие регуляризуемости эквивалентно требованию (см. также ⁽⁶⁾, § 13)

$$\det \int_+ A^{-1}(\lambda) d\lambda \neq 0. \quad (5)$$

По аналогии с плоским случаем ⁽⁸⁾ в обеих задачах будем искать решение $u(x) \in C_{\alpha}^1(G+S)$, $0 < \alpha < 1$. При этом естественно предполагать, что $f(y) \in C_{\alpha}^1(S)$ и $g(y) \in C_{\alpha}(S)$ *.

Покажем, что индексы задач Дирихле и Неймана совпадают. Введем вещественный псевдодифференциальный оператор Λ первого порядка с символом $-|\xi|$, действующий на многообразии S . Его нетрудно выписать в явном виде. Вместо краевого условия (2) рассмотрим краевое условие на S

$$\Lambda u = g, \quad (6)$$

Λ — фредгольмов оператор, действующий на $C_{\alpha}^1(S)$ в $C_{\alpha}(S)$ ⁽⁶⁾. При вычислении индекса краевых задач оператор Λ можно считать обратимым, поэтому индекс задачи (1), (2) совпадает с индексом задачи (1), (6).

Краевые условия (3) и (6) соединим гомотопией ($0 \leq t \leq 1$)

$$t\Lambda u + (1-t)\frac{\partial u}{\partial \nu} = g. \quad (7)$$

Покажем, что при всех t и τ , $0 \leq t \leq 1$, $|\tau| \neq 0$,

$$\det\{-t|\tau|E + i(1-t)D_+(\tau)\} \neq 0. \quad (8)$$

В силу однородности матрицы $D_+(\tau)$ относительно $|\tau|$ можно считать $|\tau| = 1$.

Неравенство (8) очевидно при $t = 1$. По непрерывности и в силу равномерной эллиптичности системы (1) оно справедливо и при $1 - \varepsilon \leq t \leq 1$ для достаточно малого $\varepsilon > 0$.

Матрица $A_+(\lambda)$ обратима для любых λ , $\text{Im } \lambda \leq 0$, в частности для $\lambda = -it/(1-t)$, откуда и следует неравенство (8) при $0 \leq t \leq 1 - \varepsilon$.

Пользуясь базисом Я. Б. Лопатинского, из формул (4), (5) и (8) заключаем, что при всех t , $0 \leq t \leq 1$, выполнено условие регуляризуемости задачи (1), (7) ($|\tau| \neq 0$)

$$\det \int_+ [-t|\tau| + i(1-t)\lambda] A^{-1}(\lambda) d\lambda \neq 0,$$

откуда и вытекает равенство индексов задач (1), (3) и (1), (6). Последнее утверждение может быть получено также непосредственным применением теоремы 17.3 из ⁽⁶⁾.

Теперь признаки фредгольмовости задачи Дирихле, указанные М. С. Аграповичем (⁽⁶⁾, § 18), перепосылаются на задачу Неймана. Именно (нётерова) задача Неймана фредгольмова в следующих двух случаях: $p < n$ или n нечетно.

* Поскольку решение однородной задачи Дирихле вместе с коэффициентами обладают достаточной гладкостью ⁽⁹⁾ и сопряженная задача определена корректно, замена пространства $C_{\alpha}(G+S)$ на $C_{\alpha}^1(G+S)$ не меняет индекса задачи Дирихле.

Используя идеи, развитые в плоском случае А. В. Бицадзе (⁸), § 5), задачи Дирихле и Неймана можно исследовать приведением к эквивалентной системе сингулярных интегральных уравнений. Применение сингулярных уравнений позволяет ослабить требования на гладкость поверхности S . Достаточно предполагать, что S — поверхность Ляпунова.

Институт математики
Академии наук БССР
Минск

Поступило
12 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Б. В. Боярский, Бюлл. Польской АН, сер. матем., астр. и физ. наук, т. 8, № 1, 19 (1960). ² В. И. Шевченко, Докл. АН УССР, № 6, 506 (1967). ³ В. И. Шевченко, ДАН, т. 210, № 6 (1973). ⁴ В. И. Шевченко, Сб. Матем. физика, в. 5, Киев, 1968, стр. 206. ⁵ Я. Б. Лопатинский, Укр. матем. журн., т. 5, 123 (1953). ⁶ М. С. Агранович, УМН, т. 20, в. 5, 3 (1965). ⁷ Я. Б. Лопатинский, Научн. зап. Львовск. политехн. ин-та, в. 38, сер. физ.-матем., № 2, 3 (1956). ⁸ А. В. Бицадзе, Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, «Наука», 1966. ⁹ S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, Comm. Pure Appl. Math., v. 17, № 1, 35 (1964).