

УДК 517.949

МАТЕМАТИКА

Л. Я. ШЛЯПОЧНИК

О КОЭРЦИТИВНЫХ РАЗНОСТНЫХ АППРОКСИМАЦИЯХ ЗАДАЧИ С КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

(Представлено академиком П. Я. Кочиной 13 IX 1973)

1. В настоящей работе изучаются разностные аппроксимации следующей задачи в полуплоскости $R_+^2 = \{x: x = (x_1, x_2), x_2 \geq 0\}$:

$$\Delta u = f(x), \quad x_2 > 0; \quad (1)$$

$$-\frac{\partial u}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} = g(x_1), \quad x_2 = 0, \quad (2)$$

где Δ — оператор Лапласа, а f и g принадлежат пространствам Соболева — Слободецкого H_s и $H_{s+1/2}$ функций, определенных соответственно в R_+^2 или в R^1 . Функцию $u(x)$ ищем в пространстве H_{s+2} , s — целое неотрицательное число. Легко видеть, что граничный оператор в уравнении (2) удовлетворяет условию коэрцитивности Шапиро — Лопатинского (см., например, (1, 2)):

$$|i\xi_1 + x_1 \sqrt{1 + \xi_1^2}| \geq |\xi_1|, \quad x_1, \xi_1 \in R^1.$$

Используя преобразование Фурье по x_1 , можно доказать априорную оценку решений задачи (1), (2)

$$\|u\|_{s+2} \leq C(\|f\|_s + \|g\|_{s+1/2} + \|u\|_0). \quad (3)$$

2. Обозначения. $R_{+,h}^2$ — квадратная сетка шага $h > 0$ в полуплоскости R_+^2 , $(0, 0) \in R_{+,h}^2$;

$$R_h^1 = \{x_1: (x_1, 0) \in R_{+,h}^2\};$$

$D_{k,h}$ ($\bar{D}_{k,h}$) — двухточечная аппроксимация вперед (назад) оператора $\partial/\partial x_k$ на сетке $R_{+,h}^2$, $k=1, 2$; π' — оператор ограничения,

$$\pi' u_h(x_1, x_2) \equiv u_h(x_1, 0);$$

$\theta_{2,h}$ — оператор сдвига,

$$(\theta_{2,h} u_h)(x_1, x_2) \equiv u_h(x_1, x_2 + h);$$

$\varphi_r^q(x)$, $0 < r < q$, — функция из класса $C^\infty(R_+^2)$,

$$\varphi_r^q(x) \equiv 1 \quad \text{при } |x| \leq r,$$

$$\varphi_r^q(x) = \exp\{(|x| - r)^2 / [(|x| - r)^2 - (q - r)^2]\} \quad \text{при } r < |x| < q,$$

$$\varphi_r^q(x) \equiv 0 \quad \text{при } |x| \geq q;$$

$H_s^{(h)}$ — пространство комплекснозначных функций $u_h(x)$, определенных на сетке $R_{+,h}^2$, с нормой

$$\|u_h\|_s^{(h)} = \left[h^2 \sum_{R_{+,h}^2} (|u_h|^2 + |D_{1,h}^s u_h|^2 + |D_{2,h}^s u_h|^2) \right]^{1/2};$$

$H_{s+1/2}^{(h)}$ — пространство функций $v_h(x_i)$, определенных на сетке R_h^1 , с нормой

$$\|v_h\|_{s+1/2}^{(h)} = \left[\int_{-\pi/h}^{\pi/h} |\tilde{v}_h(\xi_1)|^2 (1+\xi_1^2)^{s+1/2} d\xi_1 \right]^{1/2},$$

где $\tilde{v}_h(\xi_1)$ — сеточное преобразование Фурье функции v_h .

3. Некоэрцитивность разностной аппроксимации с постоянными коэффициентами. Будем рассматривать классическую пятиточечную аппроксимацию на сетке $R_{+,h}^2 \setminus R_h^1 \times \{0\}$ оператора Лапласа Δ :

$$\Delta_h = \theta_{2,h}(D_{1,h}\bar{D}_{1,h} + D_{2,h}\bar{D}_{2,h}).$$

На границе $R_h^1 \times \{0\}$ сетки $R_{+,h}^2$ введем оператор A_h :

$$A_h = \pi'(-\bar{D}_{1,h} + x_1 D_{2,h}), \quad (4)$$

где

$$\bar{D}_{1,h} = D_{1,h}P(hD_{1,h}, h\bar{D}_{1,h}, hD_{2,h}) + D_{2,h}Q(hD_{2,h}), \quad (5)$$

P, Q — не зависящие от h комплексные полиномы, удовлетворяющие условиям

$$P(0, 0, 0) = 1, \quad Q(0) = 0.$$

Однопараметрическое семейство $\mathcal{A}_{P,Q} = \{(\Delta_h, A_h), h > 0\}$ будем называть разностной аппроксимацией задачи (1), (2). Заметим, что (5) — общий вид локального разностного оператора, аппроксимирующего на сетке $R_{+,h}^2$ оператор $\partial/\partial x_1$.

Разностная аппроксимация $\mathcal{A}_{P,Q}$ не сохраняет априорную оценку (3). Точнее, справедлива следующая

Теорема 1. Для любой разностной аппроксимации $\mathcal{A}_{P,Q}$ задачи (1), (2) существуют положительные постоянные r, C и h_0 , не зависящие от h , и однопараметрическое семейство сеточных функций $\{u_h(x)\}$, $u_h \neq 0$, такие, что $u_h = 0$ при $|x| \geq r$, и выполняется неравенство

$$\|u_h\|_{s+2}^{(h)} \geq \frac{C}{h^{1/4}} (\|\Delta_h u_h\|_s^{(h)} + \|A_h u_h\|_{s+1/2}^{(h)} + \|u_h\|_0^{(h)}), \quad 0 < h \leq h_0.$$

Справедливо обобщение теоремы 1 на случай, когда оператор $\partial/\partial x_2$ в граничном условии (2) аппроксимируется произвольной (локальной) разностной схемой.

Отметим, что разностный аналог условия коэрцитивности Шапиро — Лопатинского в применении к разностной аппроксимации $\mathcal{A}_{P,0}$ ($Q=0$) принимает вид

$$|\xi P(\xi, -\bar{\xi}, \lambda) + x_1 \lambda| \geq C_1 \cdot |\xi| \quad \forall \eta \in (-\pi, \pi), \quad \forall x_1 \in R^1, \quad (*)$$

где

$$\xi = \xi(\eta) = e^{i\eta} - 1, \quad \lambda = \lambda(\eta) = \sin^2 \frac{\eta}{2} - \left[\sin^2 \frac{\eta}{2} \left(1 + \sin^2 \frac{\eta}{2} \right) \right]^{1/2},$$

а постоянная C_1 не должна зависеть от x_1 и η (см. (3, 4)).

Некоэрцитивность аппроксимации $\mathcal{A}_{P,Q}$ задачи (1), (2), установленная теоремой 1, связана с тем обстоятельством, что граничный оператор A_h не удовлетворяет разностному аналогу условия Шапиро — Лопатинского (в частности, любой полином $P(t_1, t_2, t_3)$ принимающий в нуле значение 1, не удовлетворяет условию (*)).

4. Класс аппроксимаций, допускающих слабую априорную оценку. Обозначим через $\mathfrak{A}$ класс разностных аппроксимаций $\mathcal{A}_{P,0}$ задачи (1), (2), удовлетворяющих условию

$$\operatorname{sign} \eta \cdot \operatorname{Im} [\xi \cdot P(\xi, -\bar{\xi}, \lambda)] \geq 0, \quad -\pi \leq \eta \leq \pi. \quad (**)$$

В частности, аппроксимация $\mathcal{A}_{P,0}$ удовлетворяет условию (**), если оператор (5) — простейшая симметрическая или несимметрическая разность:

$$\bar{D}_{1,h} = (D_{1,h} + \bar{D}_{1,h})/2, \quad P(t_1, t_2, t_3) \equiv 1 - t_2/2,$$

или

$$\bar{D}_{1,h} = D_{1,h}, \quad P \equiv 1.$$

Для разностной аппроксимации $\mathcal{A}_{P,0} \in \mathfrak{A}$ справедлива следующая

Теорема 2. Пусть $u_h(x) \in H_{s+2}^{(h)}$, $A_h u_h \in H_{s+1/2}^{(h)}$.

Тогда имеет место априорная оценка

$$\|u_h\|_{s+1}^{(h)} \leq C (\|\Delta_h u_h\|_s^{(h)} + \|A_h u_h\|_{s+1/2}^{(h)} + \|u_h\|_0^{(h)}), \quad 0 < h \leq h_0,$$

где $(\Delta_h, A_h) \in \mathcal{A}_{P,0}$, а постоянные C и h_0 зависят лишь от s и полинома P , $h_0 > 0$.

5. Построение локально коэрцитивных аппроксимаций. Нетрудно доказать, что для любой разностной аппроксимации $\mathcal{A}_{P,0}$ условие (*) нарушается лишь на конечном подмножестве $U_P \subset \mathbf{R}^1$ точек x_1 . Локально коэрцитивная разностная аппроксимация задачи (1), (2) может быть построена с помощью суперпозиции двух и более разностных аппроксимаций $\mathcal{A}_{P,0} \in \mathfrak{A}$, имеющих попарно непересекающиеся множества U_P . Мы ограничимся рассмотрением следующего примера.

Положим

$$\bar{D}_{1,h} = (p+1)D_{1,h} - p(D_{1,h} + \bar{D}_{1,h})/2, \quad p > 0,$$

а соответствующий (по формуле (4)) оператор обозначим через B_h .

Теорема 3. Для любой функции $u_h \in H_{s+2}^{(h)}$, $h < 1$, справедлива оценка

$$\|\varphi_r^q u_h\|_{s+2}^{(h)} \leq C (\|\Delta_h(\varphi_r^q u_h)\|_s^{(h)} + \|B_h(\varphi_r^q u_h)\|_{s+1/2}^{(h)} + \|u_h\|_0^{(h)}),$$

где постоянная C зависит лишь от p, s, r и q , $q \leq 5p$.

Таким образом, семейство $\{(\Delta_h, B_h), 0 < h \leq 1\}$ дает пример локально коэрцитивной аппроксимации задачи (1), (2).

Автор выражает искреннюю благодарность Л. А. Чудову за полезные замечания и советы по настоящей работе.

Центральный научно-исследовательский
экспериментальный и проектный институт
по сельскому строительству
Москва

Поступило
10 IX 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. С. Агранович, М. И. Вишик, Усп. матем. наук, т. 19, в. 3, 53 (1964). ² Л. Хёрмандер, Линейные дифференциальные операторы с частными производными, М., 1965.
³ Л. С. Франк, ДАП, т. 192, № 3, 42 (1970). ⁴ Ю. И. Мокин, Р. Д. Лазаров, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 13, № 2, 488 (1973).