

В. И. ЯНЧЕВСКИЙ

КОММУТАНТЫ ПРОСТЫХ АЛГЕБР С СЮРЪЕКТИВНОЙ ПРИВЕДЕННОЙ НОРМОЙ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 4 X 1974)

Пусть A — простая конечномерная центральная алгебра над полем k , A^* — мультипликативная подгруппа обратных элементов A , A' — коммутант A^* и $A^{(n)}$ — подгруппа A^* элементов с приведенной нормой, равной 1 (см. (1, 2)).

Известная гипотеза Таннака — Артина (3-5) о коммутанте A' состоит в следующем: $A' = A^{(n)}$. Эта гипотеза, представляющая самостоятельный интерес, является также одним из ключевых моментов в доказательстве более общей гипотезы Кнезера — Титса об односвязных алгебраических группах (6, 7), которая доказана в настоящее время лишь для групп, определенных над локально-компактными полями (Платонов (6)). Гипотеза же Таннака — Артина доказана в двух случаях: 1) k — локально-компактное поле (Накаяма — Мацусима (8)), 2) k — поле алгебраических чисел (теорема Ванга (9)).

Основной целью настоящей заметки является, во-первых, доказательство гипотезы Таннака — Артина для так называемых C_0^2 -полей k (определение см. ниже) и, во-вторых, простое доказательство теоремы Ванга. Имеющееся в настоящее время доказательство этой теоремы довольно длинно и сложность приведенных в нем рассуждений не вызывается существом дела. Автор признателен В. П. Платонову, обратившему его внимание на существование такого простого доказательства.

Ниже $\text{Nrd}_{A|k}$ обозначает отображение приведенной нормы из A в k . Для формулировки основного результата необходимо следующее

Определение. Поле k называется C_2^0 -полем, если произвольное расширение k' поля k обладает свойством: для произвольного конечномерного центрального тела D над k' отображение $\text{Nrd}_{D|k'}$ объективно.

Теорема. Пусть $k \in C_2^0$ -поле. Тогда $A' = A^{(n)}$.

Впервые справедливость этой теоремы отмечена в (9).

Докажем предварительно одну элементарную лемму.

Лемма. Пусть B — конечномерное центральное тело над полем P , σ — автоморфизм B . Тогда для произвольного элемента $x \in B$ $\text{Nrd}_{B|P}(x^\sigma) = (\text{Nrd}_{B|P}(x))^\sigma$.

Доказательство. Обозначим через L максимальное подполе B , содержащее x . Тогда образ L^σ поля L при действии σ есть максимальное подполе B , содержащее x^σ . Воспользуемся теперь следующим свойством приведенной нормы (которое понадобится нам и в дальнейшем): если $b \in B$ содержится в максимальном подполе T , то $\text{Nrd}_{B|P}(b) = N_P^T(b)$, где N_P^T — обычная норма в поле T (10). Тогда ясно, что для доказательства леммы достаточно показать $N_P^{L^\sigma}(x^\sigma) = (N_P^L(x))^\sigma$. Последнее же почти тривиально. Действительно, если f — минимальный полином x над P , то минимальный полином f^σ элемента x^σ над P^σ получается из f применением к его коэффициентам σ . Так как P — центр B , то $P^\sigma = P$ и потому коэффициенты полученного полинома принадлежат P . Учитывая, далее, выражение норм $N_P^{P(x)}(x)$ и $N_P^{P(x^\sigma)}(x^\sigma)$ через свободные члены f и f^σ , получим $N_P^{P(x^\sigma)}(x^\sigma) =$

$= (N_P^{P(x)}(x))^{\sigma}$. Поскольку $[L^{\sigma} : P(x^{\sigma})] = [L : P(x)]$ и $N_P^L(x) = (N_P^{P(x)}(x))^{[L:P(x)]}$, $N_P^{L^{\sigma}}(x^{\sigma}) = (N_P^{P(x^{\sigma})}(x^{\sigma}))^{[L^{\sigma}:P(x^{\sigma})]}$, то наша лемма доказана.

Доказательство теоремы. В ⁽⁵⁾ дана редукция доказательства теоремы к случаю тел примарного индекса. Итак, пусть D — конечномерное центральное тело примарного индекса l^n над C_2^0 -полем k . Доказательство проводится индукцией по n . Случай $n=1$ разобран в ⁽⁵⁾. Предположим, что наше утверждение доказано для конечномерных центральных над C_2^0 -полями тел индекса l^r , $r < n$. Включение $D' \subset D^{(l)}$ тривиально, поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что из $\alpha \in D^{(l)}$ следует $\alpha \in D'$.

Оставляя в стороне тривиальный случай $\alpha=1$, получаем, что произвольное максимальное подполе L , содержащее α , не является чисто несепарабельным расширением k . (В самом деле, если это не так, т. е. L чисто несепарабельно над k , то $\text{Nrd}_{D|k}(\alpha) = 1 = N_k^L(\alpha)$ и ввиду чистой несепарабельности L над k $\alpha=1$.) Пусть M — максимальное сепарабельное подрасширение L над k , E — расширение Галуа поля k , содержащее M , G — группа Галуа E над k , H — l -подгруппа Силова G и F — поле инвариантов H . Тогда $[F:k] = m$ взаимно просто с l и потому $D_F = D \otimes_k F$ — центральное тело над F индекса l^n . Обозначим через $G(MF)$ группу Галуа E над композитом MF полей M и F и рассмотрим композиционный ряд H , проходящий через $G(MF)$. Тогда, согласно основной теореме теории Галуа, поле F обладает циклическим расширением степени l , содержащимся в MF . Учитывая изоморфизм над F полей MF и $M \otimes_k F$, получаем, что существует циклическое расширение F степени l , содержащееся в $M \otimes_k F$. Предположим, что $\alpha \otimes_k 1 \in D_F$. Тогда, согласно лемме 3 из ⁽⁵⁾, $\alpha^m \in D'$, а в силу леммы 4 из ⁽⁵⁾ $\alpha^n \in D'$. Так как l и m взаимно просты, то из $\alpha^m \in D'$, $\alpha^n \in D'$ следует $\alpha \in D'$.

Таким образом, последнее рассуждение показывает, что, не ограничивая общности, можно считать, что k обладает циклическим расширением степени l , содержащимся в M . Обозначим это расширение через P . Пусть B — централизатор P в D . Тогда B — центральное над C_2^0 -полем P тело индекса l^{n-1} (см. ⁽¹³⁾, гл. 5, теорема 19). Через v обозначим приведенную норму $\text{Nrd}_{B|P}(\alpha)$. Поскольку $\text{Nrd}_{D|k}(\alpha) = 1$, то $N_k^P(v) = 1$. В силу теоремы Гильберта $90 \ v = \beta^{\sigma} \beta^{-1}$, где σ — образующая группы Галуа P над k ; $\beta \in P$.

Далее, автоморфизм σ продолжается до внутреннего автоморфизма тела D (который мы будем обозначать той же буквой). Так как $P^{\sigma} = P$, а B — централизатор P , то $B^{\sigma} = B$ и ограничения σ на B есть автоморфизм B . P — C_2^0 -поле, и потому существует $x \in B$ такой, что $\text{Nrd}_{B|P}(x) = \beta$. Согласно лемме $\text{Nrd}_{B|P}(x^{\sigma}) = \beta^{\sigma}$. Поскольку σ — внутренний автоморфизм D , то $x^{\sigma} = g \times g^{-1}$ для некоторого $g \in D$. Если $z = g \times g^{-1} x^{-1}$, то $\text{Nrd}_{B|P}(z) = v$ и, следовательно, $\alpha z^{-1} \in B^{(l)}$. Применяя индуктивное предположение к $\alpha z^{-1} \in B^{(l)}$, получаем $\alpha z^{-1} \in B'$. Но $B' \subset D'$ и потому $\alpha z^{-1} \in D'$. А так как z — коммутатор, то $\alpha \in D'$. Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть k — C_2' -поле (в частности, C_2 -поле ^(11, 12)). Тогда $A' = A^{(l)}$.

Доказательство. Непосредственно из определения C_2' -полей (C_2 -полей) следует, что они являются C_2^0 -полями.

Еще большая специализация дает

Следствие 2. Если поле k либо локально-компактное, либо функциональное с конечным полем констант, то $A' = A^{(l)}$.

Доказательство. Поля, указанные в формулировке следствия, C_2' -поля и потому C_2^0 -поля.

Доказательство теоремы Ванга. Рассуждения из доказательства предыдущей теоремы почти полностью переносятся на случай полей алгебраических чисел k . Изменения незначительны, поэтому мы укажем на них, не воспроизводя всего доказательства. Итак, пусть D — централь-

ное тело над k индекса l^n , $n \neq 1$, $\alpha \in D^{(n)}$. Как и в доказательстве предыдущей теоремы, не ограничивая общности можно считать, что максимальное подполе L , содержащее α , обладает подполем P , циклическим над k и имеющим над k степень l .

Далее, пусть B — централизатор P в D , $v = \text{Nrd}_{B|P}(\alpha)$ и $v = \beta^\sigma \beta^{-1}$, где σ — автоморфизм D , продолжающий образующую группы Галуа P над k . Если поле P не обладает бесконечными точками, в которых B разветвлено, то, в силу предложения 3 из гл. XI, § 3 книги ⁽¹⁾, отображение $\text{Nrd}_{B|P}$ сюръективно и потому существует элемент $x \in B$ такой, что $\text{Nrd}_{B|P}(x) = \beta$, а дальше, как и в доказательстве предыдущей теоремы, устанавливается, что $\alpha \in D'$. Если $l \neq 2$, то поле P обладает приведенным выше свойством и потому остается рассмотреть случай, когда $l = 2$ и множество T бесконечных точек P , в которых B разветвлено, не является пустым. Пусть C — множество точек k , над которыми лежат точки из T , $v \in C$ и ω_1 — точка из T , лежащая над v . Обозначим через ω_2 вторую точку P , лежащую над v .

Если j_1 и j_2 — вещественные вложения P в поле комплексных чисел, соответствующие точкам ω_1 и ω_2 , то $j_2 = j_1 \sigma$. Поскольку $v \in \text{Nrd}_{B|P}(B)$, то $j_1(v) > 0$ (предложение 3, гл. XI, § 3 книги ⁽¹⁾), а тогда

$$j_1(v) = j_1(\beta^\sigma) j_1(\beta^{-1}) = j_2(\beta) j_1(\beta^{-1}) = j_2(\beta) (j_1(\beta))^{-1} > 0.$$

Следовательно, $j_1(\beta)$ и $j_2(\beta)$ имеют одинаковый знак; назовем этот знак знаком точки v . Так как вложения j_1 и j_2 совпадают на k , то $j_1(\mu\beta)$ и $j_2(\mu\beta)$ для произвольного элемента $\mu \in k$ имеют одинаковый знак.

В силу слабой аппроксимационной теоремы существует элемент $\mu \in k$ такой, что для всех точек $v_j \in C$ и соответствующих им вещественных вложений p_j поля k в поле комплексных чисел знак $p_j(\mu)$ совпадает со знаком v_j . Элемент $\mu\beta$ обладает тогда свойством: для произвольной точки $\omega \in T$ и соответствующего ей вещественного вложения f поля P в поле комплексных чисел $f(\mu\beta) > 0$, поэтому $\mu\beta \in \text{Nrd}_{B|P}(B)$ (снова предложение 3, гл. XI, § 3 книги ⁽¹⁾). Остается заметить, что $v = (\mu\beta)^\sigma (\mu\beta)^{-1}$, а тогда рассуждения, аналогичные уже применявшимся в доказательстве предыдущей теоремы, показывают, что $\alpha \in D'$.

Теорема доказана.

Примечание при корректуре. После того как статья была сдана в печать, В. П. Платонову удалось, вопреки ожиданиям, показать, что проблема Танака — Артина решается, вообще говоря, отрицательно (см. ДАН, т. 221, № 5).

Институт математики
Академии наук БССР
Минск

Поступило
1 X 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Вейль, Основы теории чисел, М., 1972. ² Н. Бурбаки, Алгебра: модули, кольца, формы, М., 1966. ³ Х. Басс, Алгебраическая K-теория, М., 1973. ⁴ В. П. Платонов, В. И. Янчевский, ДАН, т. 208, № 3, 541 (1973). ⁵ S. Wang, Am. J. Math., v. 72, № 2, 323 (1950). ⁶ В. П. Платонов, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 33, № 2, 1211 (1969). ⁷ J. Tits, Ann. Math., v. 80, № 2, 313 (1964). ⁸ T. Nakayama, Y. Matsushima, Proc. Imper. Acad. Japan, v. 19, 21 (1943). ⁹ В. И. Янчевский, Матем. сборн., т. 93, № 3, 368 (1974). ¹⁰ С. Ленг, Алгебра, М., 1968. ¹¹ S. Lang, Ann. Math., v. 55, № 2, 373 (1952). ¹² Ж.-П. Серр, Когомологии Галуа, М., 1968. ¹³ Н. Джекобсон, Теория колец, М., 1947.