

УДК 517.43+517.948.35

МАТЕМАТИКА

М. А. АНТОНЕЦ, Г. М. ЖИСЛИН, И. А. ШЕРЕШЕВСКИЙ

О РЕДУКЦИИ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА МНОГОЧАСТИЧНЫХ ГАМИЛЬТОНИАНОВ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 23 XII 1974)

1. В настоящей заметке получены достаточные условия бесконечности дискретного спектра сингулярного дифференциального оператора H , который является гамильтонианом квантовой системы частиц. Оператор H изучается в пространстве функций, преобразуемых по кратным неприводимым представлениям группы симметрии H -прямого произведения симметрической группы на произвольную компактную подгруппу полной группы вращений.

Полученные результаты (теоремы 1, 2) позволяют во многих случаях свести вопрос о бесконечности дискретного спектра оператора H к исследованию того же вопроса для семейства операторов h , существенно более простой структуры, спектр которых хорошо изучен (^{1, 2}). Эти результаты имеют простой физический смысл: доказано, что задача о бесконечности дискретного спектра оператора энергии многочастичной квантовой системы при некоторых условиях может быть сведена к аналогичной задаче для двухчастичной системы.

Сравнение теорем 1, 2 с условиями конечности дискретного спектра оператора H (³) показывает, что полученные нами достаточные условия в ряде случаев близки к необходимым.

Результаты работы с соответствующими изменениями остаются в силе и для оператора энергии системы n частиц при наличии внешнего поля (³), а также при рассмотрении операторов (1), (3) без учета симметрии. Из теоремы 2 (случай а) замечания 2) вытекают, в частности, все ранее известные результаты (⁴⁻⁶) о бесконечности дискретного спектра H , исключая пример из (⁹). Недавние результаты (¹¹), где рассмотрен оператор (1) при $n=3$ и без учета симметрии, не пересекаются с нашими, так как относятся к случаю $\mu^a=0$ (см. п. 6).

2. Введем в $R^{3n}=\{r\}=\{r_1, \dots, r_n\}$, $r_i \in R^3$, скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ и норму $|\cdot|$

$$(r^{(1)}, r^{(2)})_i = \sum_i^{1, n} m_i(r_i^{(1)}, r_i^{(2)}), \quad |r|_i^2 = (r, r)_i, \quad m_i > 0.$$

Следуя (¹²), определим гиперплоскость $R_0 = \{r \in R^{3n}, \sum_i^{1, n} m_i r_i = 0\}$ и в пространстве $\mathcal{L}^2(R_0)$ оператор

$$H = -\frac{1}{2} \Delta_0 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^{1, n} \Theta_{ij}(r_{ij}); \quad (1)$$

здесь Δ_0 — инвариантно определенный на R_0 оператор Лапласа, $r_{ij} = r_i - r_j$, $\Theta_{ij}(r_i) = \Theta_{ji}(-r_i)$ — функции из класса $Q(R^3)$, $Q(R^3) = \{\vartheta(r_i), \vartheta(r_i) \text{ вещественны } \vartheta(r_i) \in \mathcal{L}_{loc}^2, \lim_{|r_1|' \rightarrow \infty} \int_{|r_1 - r_1'| \leq 1} |\vartheta(r_i)|^2 dr_1 = 0\}$. Оператор H описывает

относительное движение системы $C=(1, 2, \dots, n)$ n частиц с массами m_i и парным взаимодействием Θ_{ij} .

3. Будем обозначать через $Z_2=(C_1, C_2)$ разбиения множества $C=(1, 2, \dots, n)$ на подмножества C_α так, что $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, $C_1 \cup C_2 = C$. Если подсистемы C_1 и C_2 тождественны, т. е. состоят из соответственно тождественных * частиц, то будем писать $C_1 \sim C_2$. Пусть

$$M_k = \sum_{i \in C_k} m_i, \quad M = M_1 + M_2, \quad M_{Z_2} = M_1 M_2 (M_1 + M_2)^{-1}.$$

Как и в (12), определим гиперплоскости $R_{\beta^{Z_2}}$, $\beta=0, c$:

$$R_0^{Z_2} = \left\{ r, r \in R_0, \sum_{i \in C_k} m_i r_i = 0, \quad k=1, 2 \right\}, \quad R_c^{Z_2} = R_0 \ominus R_0^{Z_2};$$

проекторы $P_{\beta^{Z_2}}$ на эти гиперплоскости и действующие в $\mathcal{L}^2(R_{\beta^{Z_2}})$ операторы $H_{\beta}(Z_2)$:

$$H_0(Z_2) = -1/2 \Delta_0^{Z_2} + 1/2 \sum_k \sum_{i,j \in C_k}^{1,2} \Theta_{ij}(r_{ij}), \quad H_c(Z_2) = -1/2 \Delta_c^{Z_2}, \quad (2)$$

где $\Delta_{\beta^{Z_2}}$ — инвариантно заданный на $R_{\beta^{Z_2}}$ оператор Лапласа. Операторы H и $H_{\beta}(Z_2)$ с областями соответственно $C_0^{Z_2}(R_0)$ и $C_0^{Z_2}(R_{\beta^{Z_2}})$ существенно самосопряжены в $\mathcal{L}^2(R_0)$ и $\mathcal{L}^2(R_{\beta^{Z_2}})$ ⁽¹³⁾. Расширим их до самосопряженных, сохраняя прежнее обозначение.

4. Обозначим через $S(C')$ группу перестановок тождественных частиц подсистемы $C' \subseteq C$ между собой. Для каждого $Z_2=(C_1, C_2)$ определим подгруппы $S_{\beta^{Z_2}}$, $\beta=0, c$, из $S(C)$: $S_c^{Z_2}$ тривиальна, если $C_1 \not\sim C_2$, $S_c^{Z_2}$ порождается перестановкой g , меняющей местами C_1 и C_2 , если $C_1 \sim C_2$;

$$S_{\beta^{Z_2}} = \{ g \tilde{g} : \tilde{g} \in S_{\beta^{Z_2}}, \quad g \in S(C_1) \times S(C_2) \}.$$

Пусть, далее $\mathfrak{K}$ — такая компактная подгруппа полной группы вращений, что

$$\Theta(g r_{ij}) = \Theta(r_{ij}), \quad i, j=1, 2, \dots, n, \quad g \in \mathfrak{K}.$$

Положим $G=S(C) \times \mathfrak{K}$, $G_{\beta^{Z_2}}=S_{\beta^{Z_2}} \times \mathfrak{K}$. Мы будем рассматривать представления $g \rightarrow T_g$ групп G и $G_{\beta^{Z_2}}$ операторами Tg : $Tgf(r) = f(g^{-1}r)$ соответственно в пространствах $\mathcal{L}^2(R_0)$, $\mathcal{L}^2(R_{\beta^{Z_2}})$. Типы неприводимых представлений этих групп обозначим $\sigma=(\kappa, \lambda)$, $\sigma_{\beta}=(\kappa_{\beta}, \lambda_{\beta})$, где κ , κ_{β} — типы неприводимых представлений групп S и $S_{\beta^{Z_2}}$; λ и λ_{β} — группы $\mathfrak{K}$. В случае, когда группа $\mathfrak{K}$ тривиальна, иногда будем писать $\sigma=\kappa$. Матрицы неприводимых представлений рассматриваемых групп будем обозначать D^{σ} , $\sigma=\sigma, \kappa, \lambda$ и т. д.

Отметим, что группа $S_c^{Z_2}$ при $C_1 \sim C_2$ имеет два неприводимых представления: симметричное ($\kappa=\kappa_c^{+}$) и антисимметричное ($\kappa=\kappa_c^{-}$), причем в подпространствах четных функций из $\mathcal{L}^2(R_c^{Z_2})$ выполняется $\kappa=\kappa_c^{+}$, а в подпространствах нечетных — $\kappa=\kappa_c^{-}$ (ибо оператор g_c действует в $R_c^{Z_2}$ как инверсия ⁽¹²⁾).

5. Как и в ^(12, 13), определим проекционные операторы $\mathcal{P}^{\sigma}$, $\mathcal{P}^{\kappa}$, $\mathcal{P}^{\kappa_{\beta}}$, $\mathcal{P}^{\lambda}$, $\mathcal{P}^{\sigma}=\mathcal{P}^{\kappa} \cdot \mathcal{P}^{\lambda}$, $\mathcal{P}^{\sigma_{\beta}}=\mathcal{P}^{\kappa_{\beta}} \cdot \mathcal{P}^{\lambda_{\beta}}$ и инвариантные для операторов H и $H_{\beta}(Z_2)$ пространства $\mathfrak{H}^{\sigma}=\mathcal{P}^{\sigma} \mathcal{L}^2(R_0)$, $\mathfrak{H}_{\beta}^{\sigma_{\beta}}=\mathcal{P}^{\sigma_{\beta}} \mathcal{L}^2(R_{\beta^{Z_2}})$. Положим $H^{\sigma}=H \mathcal{P}^{\sigma}$, $H_{\beta}^{\sigma_{\beta}}(Z_2)=H_{\beta}(Z_2) \mathcal{P}^{\sigma_{\beta}}$. Операторы H^{σ} и $H_{\beta}^{\sigma_{\beta}}$ самосопряжены в $\mathfrak{H}^{\sigma}$ и $\mathfrak{H}_{\beta}^{\sigma_{\beta}}$. В настоящей заметке получены достаточные условия бесконечности дискретного спектра оператора H^{σ} .

* Частицы с номерами i, j назовем тождественными, если $m_i=m_j$ и $\Theta_{ik}(r_1)=\Theta_{jk}(r_1)$, $k=1, 2, \dots, n$.

6. Пусть $\sigma = (\kappa, \lambda)$, $\sigma_\beta = (\kappa_\beta, \lambda_\beta)$, $\beta = 0, c$. Будем писать $(\sigma_0, \sigma_c) < \sigma$, если:

а) $D^{\kappa_0} \times D^{\lambda_0} = D^{\kappa_0'}$ для какой-либо неприводимой компоненты $D^{\kappa_0'}$ представления D^{κ} при сужении его с $S(C)$ на $S_0^{Z_2}$;

б) $D^{\kappa_0} \otimes D^{\lambda_0} \supset D^{\lambda}$;

в) $\mathcal{P}^{\sigma_0} \mathcal{L}^2(R_c^{Z_2}) \neq 0$.

Будем писать $\sigma_0 < \sigma$, если для некоторого σ_c выполняется $(\sigma_0, \sigma_c) < \sigma$. Пусть $\mu^\sigma = \min_{Z_2} \inf_{\sigma_0 < \sigma} H_0^{\sigma_0}(Z_2)$; $\Xi(\sigma; Z_2) = \{\sigma_0: \sigma_0 < \sigma, \text{ дискретный спектр}$

$H_0^{\sigma_0}(Z_2)$ содержит $\mu^\sigma\}$ *, $Y_2(\sigma) = \{Z_2: \Xi(\sigma; Z_2) \neq \emptyset\}$.

7. Определим для произвольных $\alpha > 0$, $B > 0$ и Z_2 области

$$K^{Z_2}(\alpha) = \{r, r \in R_0, |P_0^{Z_2} r|_1 \leq \alpha |P_c^{Z_2} r|_1\}, \quad S(B) = \{r, r \in R_0, |r| \leq B\}.$$

Теорема 1. Пусть для данного $\sigma = (\kappa, \lambda)$ выполняется $Y_2(\sigma) \neq \emptyset$ и существуют разбиение $Z_2 = (C_1, C_2) \in Y_2(\sigma)$, функция $\Theta^{Z_2}(r_1) \in Q(R^3)$, тип σ_c неприводимого представления группы $G_c^{Z_2}$ и числа $\varepsilon \in (0, 1)$, $\alpha > 0$, $B > 0$ такие, что:

$$1) \sum_{l,p}^{1,2} \sum_{i \in C_1, j \in C_2} \Theta_{ij}(r_{ij}) \leq 2\Theta^{Z_2}(P_c^{Z_2} r), \quad r \in K^{Z_2}(\alpha) \setminus S(B);$$

2) Гамильтониан $h_\tau = -0,5\tau\Delta_c^{Z_2} + \Theta^{Z_2}(P_c^{Z_2} r)$ имеет бесконечный дискретный спектр в $\mathfrak{H}^{\sigma_c}$ для всех $\tau \in (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$;

3) $(\sigma_0, \sigma_c) < \sigma$ для какого-либо $\sigma_0 = (\kappa_0, \lambda_0) \in \Xi(\sigma, Z_2)$.

Тогда дискретный спектр оператора H^σ бесконечен.

8. З а м е ч а н и я. 1) Для справедливости условия 1 с некоторой функцией $\Theta^{Z_2}(P_c^{Z_2} r) \in Q(R^3)$ достаточно, чтобы существовали такие функции $U_{ij}(t)$ и число $N > 0$, что выполняются соотношения

$$\Theta_{ij}(r_1) \leq U_{ij}(|r_1|) \quad \text{при} \quad |r_1| > N, \quad i \in C_1, j \in C_2,$$

$$\bigvee_N^\infty U_{ij}(t) < +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} U_{ij}(t) = 0.$$

2) Для справедливости условия 2 при некотором $\varepsilon \in (0, 1)$ и всех σ_c , $\sigma_c < \sigma$ достаточно, чтобы для функции Θ^{Z_2} при каком-либо $N > 0$ имела место оценка

$$\Theta^{Z_2}(P_c^{Z_2} r) \leq e |P_c^{Z_2} r|_1^{-\gamma} \quad \text{при} \quad |P_c^{Z_2} r| > N,$$

где: а) $0 < \gamma < 2$, $e < 0$, если $\sigma = (\kappa, \lambda)$; б) $\gamma = 2$, $8e < -1$, если $\sigma = \kappa$ и $C_1 \sim C_2$; в) $\gamma = 2$, $8e < -9$, если $\sigma = \kappa$ и $C_1 \sim C_2$. В случае а) ε любое, $\varepsilon \in (0, 1)$; в случаях б) и в) соответственно $\varepsilon \in (0, -1-8e) \cap (0, 1)$, $\varepsilon \in (0, -9-8e) \cap (0, 1)$.

3) Для справедливости условия 3 достаточно, чтобы условие 2 было выполнено для всех σ_c , $\sigma_c < \sigma$. В частности, при $\sigma = \kappa$ и $C_1 \sim C_2$ условие 3 будет выполнено, если условие 2 справедливо для $\sigma_c = \kappa_c^+, \kappa_c^-$. При $\sigma = \kappa$ и $C_1 \sim C_2$ группа $G_c^{Z_2}$ тривиальна, $\mathfrak{H}^{\sigma_c} = \mathcal{L}^2(R_c^{Z_2})$ и условие 3 отпадает.

9. **Теорема 2.** Пусть для данного σ выполняется $Y_2(\sigma) \neq \emptyset$ и существуют разбиение $Z_2 = (C_1, C_2) \in Y_2(\sigma)$ и числа l_{ij} , $\gamma_{ij} > 0$, $N > 0$ такие, что функции Θ_{ij} удовлетворяют неравенствам

$$\Theta_{ij}(r_1) \leq l_{ij} |r_1|^{-\gamma_{ij}} \quad \text{при} \quad |r_1| > N, \quad i \in C_1, j \in C_2,$$

а числа

$$\gamma = \min_{i \in C_1, j \in C_2} \gamma_{ij}, \quad e = M_{Z_2} \sum_{i \in C_1, j \in C_2} l_{ij}$$

удовлетворяют условиям а) — в) замечания 2.

Тогда оператор H^σ имеет бесконечный дискретный спектр.

* Отметим, что если $\Xi(\sigma, Z_2) \neq \emptyset$, то $\mu^\sigma < 0$. Обратное утверждение верно только при $n=3$.

10. З а м е ч а н и я. 1) Теоремы, аналогичные теоремам 1, 2, можно доказать и для оператора

$$-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{m_i} \Delta_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^{1,n} \Theta_{ij}(r_{ij}) + \sum_{j=1}^n \Theta_j(r_j), \quad (3)$$

который является гамильтонианом системы C , находящейся во внешнем поле.

2) Для получения условий бесконечности дискретного спектра операторов (1), (3) без учета симметрии, достаточно положить $\sigma = \infty$ и считать все частицы различными.

Горьковский научно-исследовательский
радиофизический институт

Поступило
2 XII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. Ш. Бирман. Матем. сб., т. 55, № 2, 125 (1961). ² И. М. Глазман, Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов, М., 1963. ³ Г. М. Жислин, ТМФ, т. 21, № 1, 60 (1974). ⁴ Г. М. Жислин, Тр. Московск. матем. общ., т. 9, 81 (1960). ⁵ J. Uchiyama, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto, A, v. 2, 117 (1966). ⁶ Г. М. Жислин, А. Г. Сигалов, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 29, № 4, 835 (1965). ⁷ Г. М. Жислин, А. Г. Сигалов, там же, т. 29, № 6, 1261 (1965). ⁸ Г. М. Жислин, там же, т. 33, № 3, 590 (1969). ⁹ B. Simon, Helv. Phys. Acta, v. 43, № 6-7, 607 (1970). ¹⁰ E. Balslev, Ann. Phys., v. 73, № 1, 49 (1972). ¹¹ Д. Р. Яфаев, Матем. сб., т. 94, № 4, 597 (1974). ¹² А. Г. Сигалов, И. М. Сигал, ТМФ, т. 5, № 1, 73 (1970). ¹³ K. Jorgens, J. Weidmann, Spectral Properties of Hamiltonian Operators, Berlin, 1973.