

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

А. Г. АСЛАНЯН, В. Б. ЛИДСКИЙ

ФОРМУЛА ДЛЯ ЧИСЛА ЧАСТОТ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 2 XII 1974)

Отыскание частот осесимметричных колебаний тонкой упругой оболочки вращения, заземленной по двум параллелям, приводит к следующей задаче (см. (1, 2)):

$$-u'' - \frac{B'}{B} u' - \left[\left(\frac{B'}{B} \right)' + (1-\sigma) R_1^{-1} R_2^{-1} \right] u + \\ + (R_1^{-1} + \sigma R_2^{-1}) w' + (R_1^{-1} + R_2^{-1})' w = \lambda u; \quad (1)$$

$$\frac{h^2}{12} \left[\left(\frac{1}{B} \frac{d}{ds} B \frac{d}{ds} \right)^2 w - \frac{1-\sigma}{B} (B'' w')' \right] - (R_1^{-1} + \sigma R_2^{-1}) u_s' - \\ - (\sigma R_1^{-1} + R_2^{-1}) \frac{B'}{B} u + (R_1^{-2} + 2\sigma R_1^{-1} R_2^{-1} + R_2^{-2}) w = \lambda w, \quad (2)$$

$$u|_{a,b} = w|_{a,b} = w_s'|_{a,b} = 0;$$

здесь $u(s)$, $w(s)$ — компоненты вектора перемещения точки срединной поверхности, s — длина дуги меридиана оболочки, $a \leq s \leq b$, $B(s)$ — расстояние от точки меридиана до оси вращения, $B(s) > 0$, $R_1^{-1}(s)$, $R_2^{-1}(s)$ — главные кривизны оболочки ($R_1^{-1}(s)$ — кривизна меридиана), h — относительная толщина оболочки (малый параметр), λ — спектральный параметр, постоянным множителем отличающийся от квадрата собственной частоты, σ — коэффициент Пуассона. Коэффициенты системы (1) предполагаются регулярными функциями в некоторой комплексной окрестности отрезка $[a, b]$.

Задача (1), (2) является самосопряженной и имеет положительный дискретный спектр: $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots$. Пусть $n_h(\lambda)$ — функция распределения собственных значений задачи (1), (2): $n_h(\lambda) = \sum_{\lambda_n \leq \lambda} 1$. Ниже приводится формула для $n_h(\lambda)$ в некоторой зоне изменения спектрального параметра λ . Обозначим через Φ_j , $j=1, 2$, отрезки $[\alpha_j, \beta_j]$ значений функций ($s \in [a, b]$)

$$\varphi_1(s) = (1 - \sigma^2) R_2^{-2}(s); \quad (3)$$

$$\varphi_2(s) = R_1^{-2}(s) + 2\sigma R_1^{-1}(s) R_2^{-1}(s) + R_2^{-2}(s), \quad (4)$$

Отметим, что отрезок Φ_1 принадлежит непрерывному спектру задачи, в которую вырождается задача (1), (2) при $h \rightarrow 0$. Вне Φ_1 спектр вырожденной (безмоментной) задачи дискретен (см. (3, 4)). Ниже предполагаем, что

$$\lambda > \beta_1 = \sup \varphi_1(s), \quad s \in [a, b]. \quad (5)$$

Для простоты считаем, что

$$c_1(s) = R_1^{-1}(s) + \sigma R_2^{-1}(s) \neq 0, \quad s \in [a, b]. \quad (6)$$

Через $u_0(s, \lambda)$, $w_0(s, \lambda)$ обозначим решение системы (1) с $h=0$, удовлетворяющее условию Юши: $u_0(a, \lambda) = 0$, $w_0(a, \lambda) = 1$, $\lambda > \beta_1$. При каждом $s \in [a, b]$ функции $u_0(s, \lambda)$, $w_0(s, \lambda)$ аналитичны по λ в области $\lambda \notin \Phi_1$.

Справедлива следующая теорема, в формулировке которой через $[x]$ и $\{x\}$ обозначены соответственно целая и дробная части x .

Теорема 1. Пусть λ удовлетворяет условию (5), пусть $\varepsilon_1 > 0$ и пусть λ и h выбираются всюду так, что

$$\varepsilon_1 \leq \left\{ -\frac{1}{2} + \frac{12^{1/4}}{\pi \sqrt{h}} \int_a^b (\lambda - \varphi_1(t))^{1/4} dt \right\} \leq 1 - \varepsilon_1. \quad (7)$$

Пусть выполнено (6) и пусть

$$|u_0(b, \lambda)| = \varepsilon_2 > 0. \quad (8)$$

Тогда существует такое h_0 , что при всех $0 < h < h_0$ справедливо равенство

$$n_h(\lambda) = \left[-\frac{1}{2} + \frac{12^{1/4}}{\pi \sqrt{h}} \int_a^b (\lambda - \varphi_1(t))^{1/4} dt \right] + \rho_0(\lambda) - \rho_1(\lambda, \lambda), \quad (9)$$

где Λ — произвольное число, удовлетворяющее неравенствам

$$\Lambda \geq \lambda, \quad \Lambda > \beta_2 = \sup \varphi_2(s), \quad s \in [a, b]; \quad (10)$$

$\rho_0(\Lambda)$ — число s -нулей $u_0(s, \Lambda)$ на интервале (a, b) , $\rho_1(\Lambda, \lambda)$ — число t -нулей $u_0(b, t)$ на интервале (λ, Λ) . Число h_0 может быть выбрано одним и тем же при всех Λ и любом λ , удовлетворяющем условиям (7), (8) и неравенству

$$\beta_1 + \varepsilon_3 \leq \lambda \leq \lambda_0, \quad \varepsilon_3 > 0. \quad (11)$$

Таким образом, h_0 зависит от $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ и λ_0 .

В связи с теоремой 1 сделаем ряд замечаний.

1° Если в условиях теоремы отбросить ограничение (7), то это может привести к погрешности в формуле (9), не превосходящей единицы.

2° t -Нули функции $u_0(b, t)$ при $t \notin \Phi_1$ суть собственные значения безмоментной задачи. Поскольку в зоне (5) спектр указанной задачи дискретен, то условию (8) легко удовлетворить малым изменением λ .

3° Можно доказать, используя результаты (4), что разность $\rho_0(\Lambda) - \rho_1(\Lambda, \lambda)$ при условиях (5) и (10) не зависит от Λ .

4° Если $\lambda > \beta_2$, то при $\Lambda = \lambda$ получаем формулу (9) с $\rho_1(\Lambda, \lambda) = 0$. В этом случае формула (9) существенно упрощается, поскольку для определения $\rho_0(\Lambda)$ достаточно найти число s -нулей функции $u_0(s, \Lambda)$. Последняя удовлетворяет уравнению Штурма — Лиувилля с регулярными коэффициентами.

5° Можно показать на примере, что разность $\rho_0(\Lambda) - \rho_1(\Lambda, \lambda)$ может принимать сколь угодно большие по модулю отрицательные значения. Следует рассмотреть оболочку, у которой β_1 является предельной точкой собственных значений безмоментной задачи (см. (5)).

Коротко остановимся на доказательстве теоремы 1. Положим $u = y_1, \quad u' = y_2, \quad w = y_3, \quad w' = y_4, \quad w'' = y_5, \quad w''' = y_6$. Пусть $y^{(j)}(s) = (y_1^{(j)}, y_2^{(j)}, \dots, y_6^{(j)})$, $j = 1, 2, 3$, — три решения системы шести уравнений первого порядка, эквивалентной системе (1), и такие, что

$$y_i^{(1)}(a, \lambda, h) = 0, \quad i \neq 2, \quad y_2^{(1)}(a, \lambda, h) = 1; \quad y_i^{(2)}(a, \lambda, h) = 0, \quad i \neq 5,$$

$$y_5^{(2)}(a, \lambda, h) = 1; \quad y_i^{(3)}(a, \lambda, h) = 0, \quad i \neq 6, \quad y_6^{(3)}(a, \lambda, h) = 1.$$

Введем в рассмотрение определитель $\Delta_h(s, h) = \det \|y_i^{(j)}(s, \lambda, h)\|$, $i = 1, 3, 4, j = 1, 2, 3$. При фиксированном $s \in [a, b]$ $\Delta_h(s, \lambda)$ — целая функция λ ; λ -нули $\Delta_h(b, \lambda)$ — собственные значения задачи (1), (2). При условии (5) можно найти равномерную по s асимптотику шести линейно независимых решений системы (1) при $h \rightarrow 0$ и тем самым оценить число

λ -нулей $\Delta_h(b, \lambda)$ на отрезке (11) (см. (6), стр. 45, а также (7)). Прямая оценка числа нулей $\Delta_h(b, \lambda)$, расположенных левее β_1 , приводит к сложному исследованию точек поворота на множестве Φ_1 и не может быть завершена без дополнительных ограничений, налагаемых на функцию $\varphi_1(s)$. Нам удастся обойти возникающее препятствие благодаря следующему предложению.

Лемма 1. *Значение $n_h(\lambda)$ равно числу s -нулей функции $\Delta_h(s, \lambda)$ на интервале $a < s < b$. При этом каждый s -нуль считается столько раз, какова его спектральная кратность.*

Поясним, что число $s=s_0$ называется нулем $\Delta_h(s, \lambda)$ спектральной кратности l при данном λ , если

$$\partial^k \Delta_h(s_0, \lambda) / \partial \lambda^k = 0, \quad k=0, 1, \dots, l-1, \quad \partial^l \Delta_h(s_0, \lambda) / \partial \lambda^l \neq 0.$$

Спектральная кратность s -нуля не превосходит аналитическую, но не обязательно совпадает с последней. Спектральная кратность нуля $s=s_0$ равна кратности числа λ как собственного значения задачи типа (1), (2) на отрезке $[a, s_0]$. Поэтому при малых возмущениях соответствующее число вещественных s -нулей $\Delta_h(s, \lambda)$ в окрестности s_0 сохраняется (избыточное s -нули могут уйти в комплексную область).

При условии (5) имеет место следующее асимптотическое разложение для $\Delta_h(s, \lambda)$, которое вместе с обозначениями заимствовано из ((6), стр. 44):

$$\begin{aligned} \Delta_h(s, \lambda) = & c(s, \lambda, h) \{ \alpha(s, \lambda) (\cos \mu^{-1} \delta(s, \lambda) + O(\exp(-\mu^{-1} \delta(s, \lambda))) + \\ & + \mu [\beta(s, \lambda) + \gamma(s, \lambda) (\cos \mu^{-1} \delta(s, \lambda) + \sin \mu^{-1} \delta(s, \lambda))] + \\ & + O(\mu^2) + O[\mu \exp(-\mu^{-1} \delta(s, \lambda))] \} \end{aligned} \quad (12)$$

здесь

$$\mu = h^{1/2} \cdot 12^{-1/4}, \quad c(s, \lambda, h) \neq 0, \quad \delta(s, \lambda) = \int_a^s \sqrt{\lambda - \varphi_1(t)} dt; \quad \alpha(s, \lambda) = -u_0(s, \lambda);$$

$\beta(s, \lambda)$ и $\gamma(s, \lambda)$ — регулярные по s и λ функции.

Из формулы (12) легко найти число s -нулей $\Delta_h(s, \lambda)$ на тех отрезках, где $\alpha(s, \lambda) \neq 0$. С помощью леммы 1 и теоремы Рунге удастся провести оценку числа s -нулей $\Delta_h(s, \lambda)$ в окрестности нуля $\alpha(s, \lambda)$, отличного от a .

Оценка числа s -нулей $\Delta_h(s, \lambda)$ в малой правой полукрестности точки a нетривиальна и требует специального рассмотрения, поскольку первый O -член в (12) в данном случае нельзя отбросить ($\delta(a, \lambda) = 0$). Эту трудность удастся преодолеть с помощью леммы 1, которая позволяет свести оценку к подсчету λ -нулей некоторого квазиполинома. Тем самым формула (9) устанавливается при $\lambda > \beta_2$. После этого справедливость теоремы 1 в зоне $\beta_1 < \lambda \leq \beta_2$ доказывается прямой оценкой t -нулей $\Delta_h(b, t)$ на интервале (λ, Λ) (в связи с этим см. (6), стр. 45)).

Отметим в заключение, что асимптотическая формула (9) для $n_h(\lambda)$ при $h \rightarrow 0$ с тем же главным членом, что и в (9), сохраняется при $\lambda \in \Phi_1$ (см. (8)). Точная оценка остатка даже при условии, что точки поворота простые, пока не получена.

Авторы признательны А. Л. Гольденвейзеру, Г. И. Пшеничному, Г. Ландграфу за полезные советы.

Московский физико-технический институт
Долгопрудный Московской обл.

Поступило
31 X 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. Л. Гольденвейзер, Теория упругих тонких оболочек, Гостехиздат, М.—Л., 1953. ² П. Е. Товстик, Сб. Исследование по упругости и пластичности, № 4, ЛГУ, 1965. ³ В. Б. Лидский, Н. В. Харьковская, ДАН, т. 194, № 4, 786 (1970). ⁴ А. Г. Асланян, В. Б. Лидский, ПММ, т. 35, № 4, 701 (1971). ⁵ Н. В. Харьковская, Там же, т. 35, № 3, 438 (1971). ⁶ П. Е. Товстик, Свободные колебания и устойчивость оболочек вращения. Докторская диссертация, ЛГУ, 1968. ⁷ Г. И. Пшеничный, Инж. журн., т. 5, в. 4, 685 (1965). ⁸ А. Г. Асланян, В. Б. Лидский и др., Препринт, Институт проблем механики АН СССР, № 38, М., 1974.