

В. А. БАТИЩЕВ, Л. С. СРУБИЩИК

ОБ АСИМПТОТИКЕ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ ПРИ ИСЧЕЗАЮЩЕЙ ВЯЗКОСТИ

(Представлено академиком Г. И. Петровым 28 I 1975)

1. Для уравнений Навье — Стокса при больших значениях числа Рейнольдса рассматривается плоская нелинейная задача о волновом движении вязкой несжимаемой жидкости бесконечной глубины со свободной границей под действием приложенных начальных возмущений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla p + \varepsilon^2 \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{a}(x), \quad \zeta = \zeta_*(x), \quad t = 0; \quad \mathbf{v} = \nabla \mathbf{v} = 0, \quad y = -\infty; \\ p - 2\varepsilon^2 \left[(n_x^2 - n_y^2) \frac{\partial v_x}{\partial x} + n_x n_y \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] &= p_*, \quad y = \zeta(x, t); \\ -4n_x n_y \frac{\partial v_x}{\partial x} + (n_x^2 - n_y^2) \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) &= T, \quad y = \zeta(x, t), \\ \frac{\partial F}{\partial t} + v_x \frac{\partial F}{\partial x} + v_y \frac{\partial F}{\partial y} &= 0, \quad F(x, y, t) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Все величины, входящие в (1), безразмерны и связаны с размерными (последние отмечены штрихом) формулами

$$\begin{aligned} (x', y', \zeta', \zeta_*') &= l(x, y, \zeta, \zeta_*), \quad t' = \gamma t, \quad (\mathbf{v}', \mathbf{a}') = \frac{l}{\gamma} (\mathbf{v}, \mathbf{a}), \\ (p', p_*', T') &= \rho_0 l^2 \gamma^{-2} (p, p_*, T), \quad \varepsilon^2 = \frac{l^2}{\nu \gamma} = 1/\operatorname{Re}; \end{aligned}$$

здесь $\mathbf{v}'$ — вектор скорости, x', y' — прямоугольные декартовы координаты, p' — гидродинамическое давление, $\zeta'(x, t)$ — возвышение свободной поверхности Γ_t в момент времени t . $F(x, y, t) = 0$ — уравнение Γ_t в неявной форме, $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ — единичный вектор нормали к Γ_t , $\mathbf{g}$ — ускорение силы тяжести, ρ_0 — плотность жидкости, l и γ соответственно единицы длины и времени, ν — кинематический коэффициент вязкости, Re — число Рейнольдса. Касательное напряжение $T(x, t)$ на свободной границе Γ_t предполагается величиной порядка $O(\varepsilon^2)$. Жидкость приводится в движение начальным возвышением свободной границы $\zeta_*(x)$, начальным полем скоростей $\mathbf{a}(x)$ и внешним поверхностным напряжением $\mathbf{p}_n = (p_*, T)$.

Задача (1) в линеаризованной постановке исследовалась в работах ⁽¹⁻⁵⁾. В настоящей заметке построена асимптотика решения задачи (1) при $\varepsilon^2 = 1/\operatorname{Re} \rightarrow 0$. Применяется метод работы ⁽⁶⁾.

2. Асимптотические разложения решения задачи (1) строятся в виде

$$\mathbf{v} \sim \sum_{k=0}^N \varepsilon^k \mathbf{v}_k(x, y, t) + \sum_{k=0}^N \varepsilon^k \mathbf{h}_k \left(\frac{\rho}{\varepsilon}, \varphi, t \right), \quad (2)$$

$$p \sim \sum_{h=0}^N \varepsilon^h p_h(x, y, t) + \sum_{h=0}^N \varepsilon^h q_h\left(\frac{\rho}{\varepsilon}, \varphi, t\right), \quad \zeta \sim \sum_{h=0}^N \varepsilon^h \zeta_h(\varphi, t).$$

Функции v_0 , p_0 , ζ_0 находятся из решения задачи о волнах на поверхности идеальной несжимаемой жидкости бесконечной глубины

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_0}{\partial t} + (v_0, \nabla) v_0 &= -\nabla p_0 + g, \quad \operatorname{div} v_0 = 0, \\ v_0 &= a(x), \quad \zeta_0 = \zeta_*(x), \quad t=0, \quad v_0 = \nabla v_0 = 0, \quad y = -\infty, \\ p_0 &= p_*, \quad \frac{\partial \zeta_0}{\partial t} + v_{x0} \frac{\partial \zeta_0}{\partial x} = v_{y0}, \quad x, y, t \in \Gamma_t^0: y = \zeta_0(x, t). \end{aligned} \quad (3)$$

Функции v_k , p_k определяются в результате первого итерационного процесса (7) и удовлетворяют линейным системам

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_k}{\partial t} + \sum_{i+j=k} (v_i, \nabla) v_j &= -\nabla p_k + \Delta v_{k-2}, \quad \operatorname{div} v_k = 0, \\ v_k|_{t=0} &= 0, \quad v_k = \nabla v_k = 0, \quad y = -\infty, \quad v_{-1} = 0, \quad k=1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (4)$$

Погранслойные функции q_k , $h_k = (h_{\rho k}, h_{\varphi k})$ сосредоточены в окрестности свободной границы Γ_t и компенсируют невязки при выполнении динамического условия для касательного напряжения. Заметим, что свободная граница Γ_t^0 идеальной жидкости при $t > 0$ состоит из жидких частиц, которые находились на ней при $t = 0$. Для определения h_k , q_k вводим подвижные локальные координаты (ρ, φ) (6), где ρ — внутренняя нормаль, а $x = X(t, \varphi)$, $y = Y(t, \varphi)$ — параметрическое уравнение контура Γ_t^0 , деформирующегося со временем.

Теперь определим уравнения, которым удовлетворяют погранслойные функции h_k , q_k . Пусть $h_{\rho k}$, $h_{\varphi k}$, $v_{\rho k}$, $v_{\varphi k}$ — соответственно проекции векторов h_k , v_k на нормаль и касательную к Γ_t^0 . Подставляем (2) в (1) и полученные уравнения записываем в координатах (ρ, φ) . Разлагаем известные коэффициенты в ряды Тейлора по степеням ρ , учитываем справедливое при $\rho = 0$ соотношение $\partial \rho / \partial t + v_0 \cdot \nabla \rho = 0$ и полагаем $\rho = \varepsilon s$. Приравняв нулю последовательно коэффициенты при ε^0 , ε^1 , ..., ε^N , для h_0 получаем нелинейное однородное уравнение из которого аналогично (6) следует, что $h_0 = 0$.

Для h_k , q_k , $k \geq 1$, получаются системы линейных уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_{\varphi k}}{\partial t} + sa(t, \varphi) \frac{\partial h_{\varphi k}}{\partial s} + b(t, \varphi) \frac{\partial h_{\varphi k}}{\partial \varphi} - a(t, \varphi) h_{\varphi k} - \frac{\partial^2 h_{\varphi k}}{\partial s^2} &= F_{k-1}, \\ \frac{\partial h_{\rho k}}{\partial s} - \kappa \frac{\partial}{\partial s} (sh_{\rho, k-1}) + \delta^{-1} \frac{\partial h_{\varphi, k-1}}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{\partial q_k}{\partial s} &= - \left[\delta^{-1} \frac{\partial v_{\rho 0}}{\partial \varphi} + 2\kappa v_{\varphi 0} \right]_{\rho=0} \cdot h_{\varphi, k-1} + D_{k-1}, \\ h_k|_{t=0} &= h_k|_{s=\infty} = q_k|_{s=\infty} = 0, \quad k=1, 2, \dots, N; \end{aligned} \quad (5)$$

здесь F_k , D_k известны и выражаются через $v_0, \dots, v_k$, $h_0, \dots, h_k$. В частности, $F_0 = D_1 = 0$. Коэффициенты $a(t, \varphi)$, $b(t, \varphi)$, $\kappa(t, \varphi)$, δ равны

$$a(t, \varphi) = \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_0 \cdot \nabla \rho \right]_{\rho=0}, \quad b(t, \varphi) = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v_0 \cdot \nabla \varphi \right]_{\rho=0},$$

$$\kappa = \delta^{-3} \left(\frac{\partial X}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial Y}{\partial \varphi} \frac{\partial^2 X}{\partial \varphi^2} \right), \quad \delta^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial \varphi} \right)^2;$$

здесь κ — кривизна контура Γ_i^0 .

Далее найдем уравнение, которому удовлетворяют функции $\xi_k(t, \varphi)$. Пусть

$$\rho = \xi(t, \varphi, \varepsilon) \sim \sum_{k=0}^N \varepsilon^k \xi_k(t, \varphi)$$

уравнение Γ_i , причем $\xi=0$, так как $\rho=0$ есть уравнение Γ_i^0 . Положим в (1) $F = -\rho + \xi$ и, используя те же рассуждения, что и при выводе (5), находим

$$\frac{\partial \xi_k}{\partial t} + b(t, \varphi) \frac{\partial \xi_k}{\partial \varphi} - a(t, \varphi) \xi_k = [h_{\rho k} + v_{\rho k}]_{\rho=0} + M_{k-1},$$

$$\xi_k = 0, \quad t=0, \quad M_0 = M_1 = 0, \quad k=1, 2, \dots, N. \quad (6)$$

Применяя первый и второй итерационные процессы одновременно к динамическим условиям (1) на Γ_i , для систем (4) и (5) получаем крайние условия при $s=0$

$$\frac{\partial h_{\eta k}}{\partial s} = \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial v_{x,k-1}}{\partial y} + \frac{\partial v_{y,k-1}}{\partial x} \right) - 4 \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{\partial v_{x,k-1}}{\partial y} + A_{k-2},$$

$$p_k + q_k = 2 \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)^2 \right] \frac{\partial v_{x,k-2}}{\partial x} + 2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial y} \left(\frac{\partial v_{x,k-2}}{\partial y} + \frac{\partial v_{y,k-2}}{\partial x} \right) + B_{k-3};$$

здесь $k=1, 2, \dots, N$; $B_{-2}=B_{-1}=A_{-1}=0$, A_{k-2} , B_{k-3} известны. В данном случае $v_i = p_i = \xi_i = 0$. Так же как и в (6), решение уравнений (5), (7) при $k=1$ получается в виде

$$h_{\eta 1} = f(t, \varphi) \pi^{-1/2} \int_0^u \beta(x, \eta) (u-x)^{-1/2} \exp \left[-\frac{s^2 L^2(t, \varphi)}{4(u-x)} \right] dx,$$

где $\beta(u, \eta)$ есть значение функции $-L^{-1}(t, \varphi) f^{-1}(t, \varphi) [\partial v_{\varphi 0} / \partial \rho + \partial v_{\rho 0} / \partial \varphi]_{\rho=0}$ в результате применения замены переменных $\eta = \eta(t, \varphi)$, $u = u(t, \varphi)$ ($du = L^2(t, \varphi) d\varphi$), а $L(t, \varphi)$, $\eta(t, \varphi)$, $f(t, \varphi)$ находятся из решения задач Коши вида

$$\frac{\partial L}{\partial t} + b(t, \varphi) \frac{\partial L}{\partial \varphi} + a(t, \varphi) L = 0, \quad L|_{t=0} = 1.$$

Заметим, что при $k=1$ из (5) следует $h_{\rho 1} = q_0 = q_1 = 0$.

3. Метод асимптотических разложений, изложенный в п. 2, переносится на случай, когда жидкость занимает ограниченную область, граница которой является свободной поверхностью.

Пример. Пусть в начальный момент времени жидкость с полем скоростей $v_x = x\sqrt{2}/2$, $v_y = -y\sqrt{2}/2$ заключена внутри круга $x^2 + y^2 \leq 1$; граница круга — свободная поверхность. Соответствующее течение идеальной жидкости при отсутствии силы тяжести было получено Л. В. Овсянниковым⁽⁸⁾. С ростом t круг D_0 деформируется в эллипс с полуосями $\tau(t)$, $\tau^{-1}(t)$, граница эллипса остается свободной и решение уравнений Эйлера имеет вид⁽⁸⁾

$$v_{x0} = i\tau^{-1}x, \quad v_{y0} = -i\tau^{-1}y, \quad p_0 = -0,5\tau\tau^*(x^2\tau^{-2} + y^2\tau^2 - 1),$$

$$\lambda t = \int_1 \sqrt{1+\rho^4} \rho^{-2} d\rho, \quad \lambda = \text{const}, \quad \dot{\tau} = \frac{d\tau(t)}{dt}.$$

Учет вязкости приводит к разложениям (2), в которых v_0 , p_0 , ξ_0 находятся из (3). Главные члены асимптотики пограничного слоя определяются из уравнений (5), (6), (7) при $k=1$, в которых

$$\begin{aligned} X(t, \varphi) &= \tau \cos \varphi, & Y(t, \varphi) &= \tau^{-1} \sin \varphi, & \partial \rho / \partial x &= -\tau^{-1} \delta^{-1} \cos \varphi, \\ \partial \rho / \partial y &= -\tau \delta^{-1} \sin \varphi, & \delta^2 &= \tau^2 \sin^2 \varphi + \tau^{-2} \cos^2 \varphi, \\ a(t, \varphi) &= \tau \tau^{-1} \delta^{-1} (\tau^{-2} \cos^2 \varphi - \tau^2 \sin^2 \varphi), & b(t, \varphi) &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} h_{\varphi 1} &= 2\tau \delta^{-1} \sin 2\varphi \int_0^t \dot{\tau}(u) \tau^{-1}(u) [\pi(t-u)]^{-1/2} \exp\left[-\frac{s^2 \delta^2}{4(t-u)}\right] du, \\ q_2 &= 4\dot{\tau} \tau^{-1} \delta^{-1} \sin^2 2\varphi \int_0^t \dot{\tau}(u) \tau^{-1}(u) \operatorname{erfc}\left(\frac{s\delta}{2\sqrt{t-u}}\right) du, \\ \xi_2 &= 4\delta^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} k \alpha_k \cos 2k\varphi + 4\delta^{-1} \int_1^{\tau} \frac{(x^4 \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi)}{(x^4 \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)^2} (1+x^4)^{1/2} \ln x dx, \\ \alpha_k &= \int_1^{\tau^2} \frac{(x-1)^{k-1}}{(x+1)^{k+1}} \cdot \frac{(x+1)^{2k} - (x-1)^{2k}}{(x+1)^{2k} + (x-1)^{2k}} (1+x^2)^{1/2} \ln x dx. \end{aligned}$$

Авторы выражают глубокую благодарность В. И. Юдовичу за помощь в работе.

Ростовский государственный
университет

Поступило
14 I 1975

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Л. Н. Сретенский, Тр. ЦАГИ, № 541 (1941). ² Н. Н. Моисеев, Журн. вычисл. матем. и матем. физ., т. 1, № 3, 548 (1961). ³ Э. Н. Потетюнко, Л. С. Срубицк, Л. Б. Царюк, Прикладная математика и механика, т. 34, в. 1, 153 (1970). ⁴ Э. Н. Потетюнко, ДАН, т. 210, № 5, 1040 (1973). ⁵ Э. Н. Потетюнко, Л. С. Срубицк, Прикладная математика и механика, т. 34, в. 5, 891 (1970). ⁶ Л. С. Срубицк, В. И. Юдович, ДАН, т. 199, № 3, 563 (1971). ⁷ М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, УМН, т. 12, № 5 (77), 3 (1957). ⁸ Л. В. Овсянников, Сб. Общие уравнения и примеры, Новосибирск, 1967.